АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ VI
ВЫПУСК
1

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Серегин Л. В. Условия непрерывности вероятностных процессов 3
Seregin L. V. Continuity Conditions of Stochastic Processes 29
Чистяков В. П. Переходные явления в ветвящихся процессах с n типами частиц 31
Cistyakov V. P. Transient Phenomena in Branching Stochastic Processes . 45
Волконский В. А. Построение неоднородных марковских процессов с помощью случайной замены времени 47
Volkonsky V. A. Construction of Inhomogeneous Markov Processes by Means of a Random Time Substitution 56
Гладышев Е. Г. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями 57
Gladyshev E. G. A new Limit Theorem for Stochastic Processes with Gaussian Increments 66
Нагаев С. В. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова . . 67
Nagaev S. V. More Exact Statements of Limit Theorems for Homogeneous Markov Chains 86

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Прохоров Ю. В., Сазонов В. В. Некоторые результаты, связанные с теоремой Бохнера 87
Prohorov Yu. V., Sazonov V. V. Some Results Associated with Bochner's Theorem 93
Леонов В. П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса 93
Leonov V. P. On the Dispersion of Time-dependent Means Stationary Stochastic Process 101
Беляев Ю. К. Один пример процесса с перемешиванием 101
Beljaev Yu. K. An Example of Stochastic Process with Mixing 103
Рогозин Б. А. Об одной оценке функций концентраций 103
Rogozin B. A. On Evaluating the Concentration Functions 105
Рогозин Б. А. Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин 106
Rogozin B. A. On the Increase of Dispersion of Sums of Independent Random Variables 108
Боровков А. А. Локальные теоремы и моменты для максимума сумм решетчатых ограниченных слагаемых 108
Borovkov A. A. Local Theorems and Moments for Maximums of Sums of Lattice Restricted Components 110
Kemeny J. G., Snell J. L. Finite Continuous Time Markov Chains 110
Кемени Д., Снел Л. Конечные цепи Маркова с непрерывным временем . . 115
Воробьев Н. Н., Фаддеев Д. К. Континуализация условных вероятностей . . 116
Vorobjev N. N., Faddeyev D. K. Continualization of Conditional Probabilities 118
Хасьминский Р. З. О предельных распределениях сумм условно-независимых случайных величин 119
Hasminsky R. Z. On Limit Distributions for Sums of Conditionally Independent Random Variables 125
Тутубалин В. Н. Инвариантные случайные меры на сфере 125
Tutubalin V. N. Les mesures aléatoires invariantes sur la sphére 130
Хазен Э. М. Определение одномерной плотности распределения и моментов случайного процесса на выходе существенно нелинейной системы 130
Khasen E. M. Evaluation of the Single-Dimensional Probability Density of Random Process in the Output af a Nonlinear System 138
Смирнов С. В., Потапов М. К. Номограмма для функции вероятности χ^2 . . 138
Smirnov S. V., Potapov M. K. Nomograms for Probability Functions χ^2 . . 140
Информация о VI Совещании по теории вероятностей и математической статистике 140

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-14-03

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ VI

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА—1961

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том VI *1961* *Выпуск 1*

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., Гнеденко Б. В., Золотарев В. М. (ответственный секретарь), *Колмогоров А. Н.* (главный редактор), *Королюк В. С., Линник Ю. В., Прохоров Ю. В.* (зам. главного редактора), *Сарымсаков Т. А., Смирнов Н. В.*

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1961

УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. В. СЕРЕГИН

Введение

Пусть x_t—измеримый сепарабельный вероятностный процесс в метрическом пространстве X на интервале времени $[0, c]$, $c < \infty$. Основная задача данной работы — изучение в терминах двумерных распределений тех условий, при которых почти все траектории (выборочные функции) процесса непрерывны.

Расстояние между множествами U, $V \subset X$ мы условимся обозначать через $\rho(U, V)$, а σ-алгебру, порожденную открытыми множествами пространства X—через $\mathfrak{B}$. Случайные события и некоторые множества будут обозначаться фигурными скобками: $\{\ldots\}$, вероятности событий — $\mathbf{P}(\cdot)$, математические ожидания случайных величин — $\mathbf{M}(\cdot)$. Запись $f(t) = o(1)$ $(f(t) = o(t))$, $t \to +0$, будет означать, что при $t \downarrow 0$ $f(t) = o(1)$ $(f(t) = o(t))$.

Значительное место в работе занимает изучение марковских процессов. Мы предполагаем, что марковский процесс задается фиксированным начальным распределением и переходной функцией $\mathbf{P}(s, x, t, U)$ $(0 \leqslant s < t \leqslant c$, $x \in X$, $U \in \mathfrak{B})$, с помощью которых известным образом конструируются все конечномерные распределения (см. [1]).

В 1934 году А. Н. Колмогоров доказал, что почти все траектории процесса непрерывны, если для некоторых постоянных α, β, $\gamma > 0$

$$\sup_{t \in [0,\ c-h]} \mathbf{M}\rho^{\alpha}(x_t, x_{t+h}) < \gamma h^{1+\beta}.$$

В 1952-53 гг. Е. Б. Дынкин [2] и Кинни (I. R. Kinney) [3] независимо друг от друга доказали, что почти все траектории марковского процесса непрерывны, если

$$\sup_{x,s,t} \mathbf{P}(s, x, t, V_{\varepsilon}(x)) = o(h), \quad h \to +0,$$

где $x \in X$; $s, t \in [0, c]$; $0 < t - s \leqslant h$ и $V_{\varepsilon}(x)$ — дополнение ε-окрестности точки $x \in X$. Критерий Дынкина—Кинни был обобщен Р. Л. Добрушиным [5] на любые случайные процессы без разрывов второго рода: *если при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t \in [0,\ c-h]} \mathbf{P}\{\rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\} = o(h), \quad h \to +0, \tag{1}$$

то почти все траектории процесса непрерывны.

Единственный класс непрерывных процессов, для которых была доказана необходимость условия типа Дынкина—Кинни, составляют одномерные

однородные по времени строго марковские процессы (см. Рей [4]; определение строго марковского процесса см. [7]).

Рассмотрим следующий пример Рея. Пусть X — плоскость и (r, φ), $(-\pi \leqslant \varphi < \pi)$ — полярная система координат на плоскости. В начальный момент времени частица находится в точке $(0, 0)$, а затем с равномерным распределением выбирает направление φ и двигается в этом направлении со скоростью $1/|\varphi|$, если $\varphi \neq 0$, или со скоростью 1, если $\varphi = 0$. Легко проверяется, что $\mathbf{P}(0, (0, 0), h, \{r > \varepsilon\}) = h/\pi\varepsilon$ при $h < \pi\varepsilon$. Заметим также, что величина φ_t полярного угла частицы в момент t является полумартингалом, для которого не выполняется условие (1).

Введем теперь обозначения основных событий и других объектов, которые будут рассматриваться в работе.

Через $\mathfrak{A}$ мы будем обозначать некоторую фиксированную систему открытых множеств $U \subset X$, удовлетворяющую следующим условиям:

I. Для каждого $U \in \mathfrak{A}$ найдется $U' \in \mathfrak{A}$ такое, что $\rho(U, \overline{U'}) > 0$. *

II. Если $U \in \mathfrak{A}$, $U' \subset U$, U' — открытое множество, то $U' \in \mathfrak{A}$.

III. Существует последовательность $\{Y_n\}$ множеств $Y_n \in \mathfrak{A}$ такая, что для каждого $U \in \mathfrak{A}$ найдется номер n, при котором $U \subset Y_n$.

Объединение всех элементов $U \in \mathfrak{A}$ мы будем обозначать через Y.

Пусть $\mathfrak{C}$ — система всех случайных интервалов $(a, b) \subset [0, c]$, обладающих следующими свойствами:

I. На каждом замкнутом интервале $[a', b'] \subset (a, b)$ x_t находится в некотором множестве $U \in \mathfrak{A}$.

II. Нельзя указать большего интервала $(a'', b'') \supset (a, b)$, также обладающего свойством I.

Положим

$$L(a, b) = \{x_t \text{ непрерывна на интервале } (a, b)\},$$

$$M_s = \bigcap_{U \in \mathfrak{A}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x_t \in \overline{U} \text{ на интервале } \left(s - \frac{1}{n}, s\right)\right\},$$

$$N_s = \bigcap_{U \in \mathfrak{A}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x_t \in \overline{U} \text{ на интервале } \left(s, s + \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{C} = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}$. Положим

$$L_0 = \bigcap_\alpha L(a_\alpha, b_\alpha),$$

$$L_1 = \bigcap_\alpha \left[L(a_\alpha, b_\alpha) \cap (M_{b_\alpha} \cup \{b_\alpha = c\})\right],$$

$$L_2 = \bigcap_\alpha \left[L(a_\alpha, b_\alpha) \cap (N_{a_\alpha} \cup \{a_\alpha = 0\}) \cap (M_{b_\alpha} \cup \{b_\alpha = c\})\right],$$

$$L = L(0, c).$$

---

* $\overline{W}$ обозначает дополнение множества $W \subset X$.

Положим далее

$$I = \{x_t \text{ не имеет разрывов второго рода}\};$$

$$K = K_1 \cap K_2,$$

где

$$K_1 = \bigcap_{t \in (0,\, c]} \left[\{\text{существует } \lim_{s \uparrow t} x_s \in Y\} \cup M_t\right],$$

$$K_2 = \bigcap_{t \in [0,\, c)} \left[\{\text{существует } \lim_{s \downarrow t} x_s \in Y\} \cup N_t\right].$$

Легко видеть, что $L \subseteq L_2 \subseteq L_1 \subseteq L_0$, $I \subseteq K$. Если $\mathbf{P}(I) = 1$, то с вероятностью 1

$$L_1 = \bigcap_{\alpha} \left[L(a_\alpha, b_\alpha) \cap (\{\lim_{t \uparrow b_\alpha} x_t \in \overline{Y}\} \cup \{b_\alpha = c\})\right]$$

$$L_2 = \bigcap_{\alpha} \left[L(a_\alpha, b_\alpha) \cap (\{\lim_{t \downarrow a_\alpha} x_t \in \overline{Y}\} \cup \{a_\alpha = 0\}) \cap (\{\lim_{t \uparrow b_\alpha} x_t \in \overline{Y}\} \cup \{b_\alpha = c\})\right].$$

В работе рассматриваются процессы, удовлетворяющие условию $\mathbf{P}(K) = 1$ или условию $\mathbf{P}(I) = 1$. Для них в терминах двумерных распределений даются условия, при которых $\mathbf{P}(L_i) = 1$ $(i = 0, 1, 2)$. Так как события L_0, L_1, L_2 связаны с поведением траектории только на множестве Y, то соответствующие теоремы дают в этом смысле локальные критерии непрерывности. Для процессов, удовлетворяющих условию $\mathbf{P}(I) = 1$, формулируются условия при которых $\mathbf{P}(L) = 1$ или $\mathbf{P}(L^\varepsilon) = 1$, где

$$L^\varepsilon = \bigcap_{t \in (0,\, c)} \left\{\rho(\lim_{s \uparrow t} x_s,\ \lim_{s \downarrow t} x_s) \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Для мартингалов (полумартингалов) и для марковских процессов, удовлетворяющих при каждом $\varepsilon > 0$ условию

$$\sup_{x,\, s,\, t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = o(1), \quad h \to +0,$$

где $x \in X$; $s, t \in [0, c]$; $0 < t - s \leqslant h$, в работе получены необходимые и достаточные условия непрерывности.

Введем некоторые другие обозначения.

а) Λ — множество сепарабельности процесса.

б) $\chi_U(x)$ — характеристическая функция множества $U \in \mathfrak{B}$. Если α — случайная величина, $0 \leqslant \alpha \leqslant c$, то положим:

в) $\tau(\alpha, U) = \inf\{t\colon\ t > \alpha,\quad x_t \in U \text{ или } t = c\}$ $\quad (U \in \mathfrak{B})$,

г) $\tau(\alpha, \varepsilon) = \inf\{t\colon\ t > \alpha,\quad \rho(x_t, x_\alpha) > \varepsilon \text{ или } t = c\}$,

д) $\alpha^{(h)} = \min(\alpha, c - h)$,

е) если существует $\lim_{s \downarrow t} x_s$ $(\lim_{s \uparrow t} x_s)$, то этот предел будет обозначаться через x_t^+ (x_t^-).

Мы будем предполагать, что при каждом $t \in [0, c)$, $\varepsilon > 0$ и $h \to +0$

$$\mathbf{P}\{\rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\} = o(1). \tag{2}$$

Если выполняется условие (2) и процесс сепарабелен, то почти все траектории обладают следующим свойством. Если в момент $t \in (0, c)$ существуют

пределы слева и справа x_t^- и x_t^+, причем $x_t^- = x_t^+$, то имеет место непрерывность: $x_t^- = x_t = x_t^+$.

Замечание 1. Согласно теореме Дуба ([1] гл. II, теорема 2.6), из условия (2) вытекает существование измеримого сепарабельного процесса с заданными конечномерными распределениями.

Замечание 2. Положим,

$$Q_s^+ = \{x_t \text{ непрерывна справа в момент } s\} \ (s \in [0, c)),$$

$$Q_s^- = \{x_t \text{ непрерывна слева в момент } s\} \ (s \in (0, c]),$$

$$Q = \bigcap_{t \in (0,c)} \left[\{x_t \in \overline{Y}\} \cup Q_t^- \cup Q_t^+\right] \cap \left[\{x_0 \in \overline{Y}\} \cup Q_0^+\right] \cap \left[\{x_c \in \overline{Y}\} \cup Q_c^-\right].$$

Если для сепарабельного процесса выполняется условие (2) и $\mathbf{P}(K) = 1$, то $\mathbf{P}(Q) = 1$.

Положим далее

$$R(a, b) = \{x_t \text{ непрерывна на } [a, b]\} \ (0 \leqslant a < b \leqslant c),$$

$$R_a^+ = \bigcup_{\varepsilon > 0} R(a, a + \varepsilon), \quad R_b^- = \bigcup_{\varepsilon > 0} R(b - \varepsilon, b),$$

$$R_0 = \bigcap_{s \in (0,c)} \left[\{x_s \in \overline{Y}\} \cup R_s^- \cup R_s^+\right] \cup \left[\{x_0 \in \overline{Y}\} \cup R_0^+\right] \cap \left[\{x_c \in \overline{Y}\} \cup R_c^-\right],$$

$$R_1 = \bigcap_{s \in [0,c]} \left[\{x_s \in \overline{Y}\} \cup R_s^+\right],$$

$$R_2 = \bigcap_{s \in (0,c)} \left[\{x_s \in \overline{Y}\} \cup (R_s^- \cap R_s^+)\right].$$

Можно проверить, что

$$L_0 \cap Q \subset R_0, \ L_1 \cap Q \subset R_1, \ L_2 \cap Q \subset R_2.$$

Замечание 3. Условие II для системы $\mathfrak{A}$ введено только с целью упрощения формулировок теорем главы I. Условие III в главе I является излишним.

Замечание 4. Пространство элементарных событий $\{\omega\}$ мы отождествляем с пространством траекторий процесса.

Глава I

УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОЦЕССА В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1.1 Леммы

Пусть $0 \leqslant a \leqslant b$, $V \in \mathfrak{B}$. Обозначим через $\eta(a, b, V)$ время пребывания траектории во множестве V на интервале время $[a, b] \cap [0, c]$:

$$\eta(a, b, V) = \int_{\min(a,c)}^{\min(b,c)} \chi_V(x_t)\, dt.$$

Пусть α, β — случайные величины и $V \in \mathfrak{B}$. Положим

$$H(\alpha, \beta, V) = \{\alpha < \beta < c, \ \lim_{h \to +0} \chi_V(x_{\beta+h}) = 1\},$$

$$H'(\alpha, \beta, V) = \{\alpha < \beta < c, \ \limsup_{h \to +0} \chi_V(x_{\beta+h}) = 1\}.$$

Лемма 1.1. *Пусть случайные величины* α, β *и множество* $V \in \mathfrak{B}$ *удовлетворяют условиям*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant c, \text{ и } x_t \in \overline{V}, \text{ если } t \in (\alpha, \beta), \tag{1.1}$$

тогда

$$\mathbf{P}(H(\alpha, \beta, V)) \leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h} \leqslant \mathbf{P}(H'(\alpha, \beta, V)).$$

Замечание 1. Легко видеть, что

$$\eta(\alpha + h, \beta + h, V) = \int_{\alpha(h)}^{\beta(h)} \chi_V(x_{t+h})\, dt.$$

Замечание 2. Если x_t имеет предел справа в момент β, то

$$\{\alpha < \beta < c, \ x_\beta^+ \in V\} \subseteq H(\alpha, \beta, V) \subseteq H'(\alpha, \beta, V) \subseteq$$

$$\subseteq \{\alpha < \beta < c, \ x_\beta^+ \in [V]\}^*.$$

В этом случае лемма 1.1 дает хорошую оценку для вероятности события $\{\alpha < \beta < c, \ x_\beta^+ \in V\}$.

Доказательство леммы 1.1 Обозначая через ψ характеристическую функцию ω-множества $\{\alpha < \beta < c\}$, положим для любой случайной величины ξ

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\xi) = \mathbf{M}(\xi\psi).$$

Если $\omega \in H(\alpha, \beta, V)$, то $\frac{1}{h}\eta(\beta, \beta + h, V) \to 1$ $(h \to +0)$, следовательно,

$$\mathbf{P}(H(\alpha, \beta, V)) \leqslant \widetilde{\mathbf{M}} \liminf_{h \to +0} \frac{\eta(\beta, \beta + h, V)}{h}. \tag{1.2}$$

Очевидно, $\eta(\beta, \beta + h, V) = \eta(\alpha, \alpha + h, V) + \eta(\alpha + h, \beta + h, V)$. Из условия (1.1) следует, что $\eta(\alpha, \alpha + h, V) = 0$, если $\omega \in \{\alpha < \beta < c\}$, $h < \beta - \alpha$, следовательно, правая часть (1.2) равна

$$\widetilde{\mathbf{M}} \liminf_{h \to +0} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h}.$$

Если $\omega \overline{\in} \{\alpha < \beta < c\}$, то при всех $h > 0$, $\eta(\alpha + h, \beta + h, V) = 0$, следовательно,

$$\widetilde{\mathbf{M}} \liminf_{h \to +0} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h} = \mathbf{M} \liminf_{h \to +0} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h}. \tag{1.3}$$

Используя лемму Фату (см. [8] стр. 115, задача 3), можно доказать, что правая часть (1.3) не превосходит

$$\liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h}.$$

---

* $[W]$ обозначает замыкание множеств $W \subset X$.

Таким образом, доказано, что

$$\mathbf{P}(H(\alpha, \beta, V)) \leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h}.$$

Аналогично имеем:

$$\mathbf{P}(H'(\alpha, \beta, V)) \geqslant \tilde{\mathbf{M}} \limsup_{h \to +0} \frac{\eta(\beta, \beta + h, V)}{h} =$$

$$= \tilde{\mathbf{M}} \limsup_{h \to +0} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h} = \mathbf{M} \limsup_{h \to +0} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h} \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha + h, \beta + h, V)}{h}.$$

Обозначим через $\mathscr{L}(U, V)$ *условие, заключающееся в том, что*

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in U, x_{t+h} \in V\}\, dt = o(h), \quad h \to +0 \quad (U, V \in \mathfrak{B}),$$

и положим

$$G(s, U, V) = \bigcup_{t \in (s, c)} \Big[\bigcap_{u \in (s, t)} \{x_u \in U\} \cap \{\lim_{v \downarrow t} \chi_V(x_v) = 1\} \Big].$$

Лемма 1.2. *Пусть* $U, V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$ *и пусть выполняется условие* $\mathscr{L}([U], V)$, *тогда при любом* $s \in [0, c)$ $\mathbf{P}(G(s, U, V)) = 0$.

Доказательство. Положим $\beta = \tau(t, [\overline{U}])$. Легко видеть, что $G(s, U, V) = H(s, \beta, V)$. Применяя лемму 1.1, имеем:

$$\mathbf{P}(H(s, \beta, V)) \leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \int_s^{\beta(h)} \frac{\chi_V(x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \int_0^{c-h} \frac{\chi_U(x_t)\chi_V(x_{t+h})}{h}\, dt = \liminf_{h \to +0} \int_0^{c-h} \frac{\mathbf{P}\{x_t \in U, x_{t+h} \in V\}}{h}\, dt = 0,$$

следовательно, $\mathbf{P}(G(s, U, V)) = 0$.

Лемма 1.3. *Пусть* $U, V \in \mathfrak{B}$. *Для того чтобы выполнялось условие* $\mathscr{L}(U, V)$, *достаточно существование двух последовательностей случайных величин* $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, *удовлетворяющих неравенствам*:

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \ldots \leqslant c,$$

и обладающих кроме того следующими свойствами:

I. *Если* $x_t \in U$, *то найдется номер* i, *при котором* $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.

II. *На каждом из интервалов* (α_i, β_i) $x_t \in \overline{V}$.

III. $\mathbf{P}\Big(\bigcap_i [\{\alpha_i = \beta_i\} \cup \{\beta_i = c\} \cup \{\lim_{t \downarrow \beta_i} \chi_V(x_t) = 0\}]\Big) = 1$.

IV. $\mathbf{M} \max\{n : \alpha_n < \beta_n\} < \infty$.

Доказательство. Принимая во внимание условие I, имеем:

$$\int_0^{c-h} \frac{\chi_U(x_t)\,\chi_V(x_{t+h})}{h}\,dt \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\beta_i^{(h)}} \frac{\chi_V(x_{t+h})}{h}\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta(\alpha_i + h,\ \beta_i + h,\ V)}{h}. \qquad (1.4)$$

Положим

$$\nu = \max\{k : \alpha_k < \beta_k\} \text{ и } \nu_n = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu \leqslant n, \\ \nu - n, & \text{если } \nu > n. \end{cases}$$

По условию II $x_t \in \overline{V}$ при $t \in (\alpha_i, \beta_i)$, следовательно, $\eta(\alpha_i + h, \beta_i + h, V) \leqslant h$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta(\alpha_i + h,\ \beta_i + h,\ V)}{h} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta(\alpha_i + h,\ \beta_i + h,\ V)}{h} + \nu_N. \qquad (1.5)$$

Из условия IV вытекает, что $\mathbf{M}\,\nu < \infty$. Так как кроме того $\nu_n \leqslant \nu$ и $\nu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\mathbf{M}\,\nu_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое N, что $\mathbf{M}\,\nu_N < \varepsilon$, тогда в силу (1.5)

$$\mathbf{M} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta(\alpha_i + h,\ \beta_i + h,\ V)}{h} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha_i + h,\ \beta_i + h, V)}{h} + \varepsilon. \qquad (1.6)$$

Из условий II, III и леммы 1.1 следует, что

$$\lim_{h \to +0} \mathbf{M} \frac{\eta(\alpha_i + h,\ \beta_i + h, V)}{h} = 0. \qquad (1.7)$$

Из (1.4), (1.6), (1.7) вытекает, что

$$\lim_{h \to +0} \sup \mathbf{M} \int_0^{c-h} \frac{\chi_U(x_t)\,\chi_V(x_{t+h})}{h}\,dt < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$\mathbf{M} \int_0^{c-h} \chi_U(x_t)\,\chi_V(x_{t+h})\,dt = o(h), \quad h \to +0. \qquad (1.8)$$

Левая часть (1.8) равна

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in U,\ x_{t+h} \in V\}\,dt.$$

Лемма доказана.

§ 1.2. Достаточные критерии непрерывности

Рассмотрим следующие ограничения, накладываемые на двумерные распределения.

а) Условие $\mathscr{L}_0$: *для любых* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{A}$ *выполняется условие* $\mathscr{L}(U, V)$, *если* $\rho(U, V) > 0$.

б) Условие $\mathscr{L}_1$: *для любых* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$ *выполняется условие* $\mathscr{L}(U, V)$, *если* $\rho(U, V) > 0$.

в) Условие $\mathscr{L}_2$: *для любых* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$ *выполняются условия* $\mathscr{L}(U, V)$ *и* $\mathscr{L}(V, U)$, *если* $\rho(U, V) > 0$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{P}(K) = 1$ *и* X *— сепарабельно. Тогда из условия* $\mathscr{L}_0$ *следует, что* $\mathbf{P}(L_0) = 1$.

Доказательство. Выберем две последовательности $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ множеств, для которых выполняются следующие условия: а) $U_n \in \mathfrak{A}$, $V_n \in \mathfrak{A}$, б) $\rho(U_n, V_n) > 0$ при каждом n, в) для любых двух точек $x, y \in Y$, $x \neq y$, найдется такое n, что $x \in U_n$, $y \in V_n$. Существование таких последовательностей вытекает из предположения о сепарабельности пространства X. Из условия теоремы следует, что для каждого n выполняется условие $\mathscr{L}([U_n], V_n)$, следовательно, $\mathbf{P}(G(t, U_n, V_n)) = 0$ при любых $t \in [0, c)$ и n. Положим

$$A = \bigcap_{n,t} \overline{G(t, U_n, V_n)} \quad (t \in \Lambda).$$

Очевидно, $\mathbf{P}(A) = 1$. Докажем, что

$$K \cap A \subseteq L_0. \tag{1.9}$$

Пусть $\omega \in K \cap A$ и пусть $(a, b) \in \mathfrak{L}$. В силу того, что $\omega \in K$, x_t не имеет разрывов второго рода на (a, b), а в силу того, что $\omega \in A$, x_t не может иметь скачков на (a, b), следовательно x_t непрерывна на (a, b). Итак, $\omega \in L_0$, чем доказано (1.9), следовательно $\mathbf{P}(L_0) = 1$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{P}(K) = 1$ *и* X *— сепарабельно, тогда*

I. *Из условия* $\mathscr{L}_1$ *следует, что* $\mathbf{P}(L_1) = 1$.

II. *Из условия* $\mathscr{L}_2$ *следует, что* $\mathbf{P}(L_2) = 1$.

Доказательство. I. Выберем две последовательности $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ множеств, удовлетворяющие условиям: а) $U_n \in \mathfrak{A}$, $\overline{V}_n \in \mathfrak{A}$, б) $\rho(U_n, V_n) > 0$ при каждом n, в) для любой точки $x \in Y$ найдется такое n, что $x \in U_n$. В силу теоремы для каждого n выполняется условие $\mathscr{L}([U_n], V_n)$. Следовательно, $\mathbf{P}(G(t, U_n, V_n)) = 0$ при любых $t \in [0, c)$ и n. Положим

$$B = \bigcap_{n,t} \overline{G(t, U_n, V_n)}, \quad (t \in \Lambda).$$

Очевидно, $\mathbf{P}(B) = 1$. Из условий теоремы 1.2 и теоремы 1.1 вытекает, что $\mathbf{P}(L_0) = 1$. Докажем, что

$$L_0 \cap K \cap B \subseteq L_1. \tag{1.10}$$

Допустим противное, т. е. предположим, что (1.10) не выполняется. Выберем $\omega \in K \cap B \cap \overline{L}_1$. Тогда существует такой интервал $(a, b) \in \mathfrak{L}$ и такое $U \in \mathfrak{A}$, что $b < c$ и $\limsup_{t \uparrow b} \chi_U(x_t) = 1$. Так как $\omega \in K$, то существует предел $\lim_{t \uparrow b} x_t = x_b^-$. Пусть n таково, что $x_b^- \in U_n$. Так как $(a, b) \in \mathfrak{L}$, то

$\omega \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{t\in(b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)} \{x_t \in V_n\}$, следовательно, $\omega \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{t\in(b-\varepsilon,\, b)} G(t, U_n, V_n)$. Это противоречит предположению о том, что $\omega \in B$, поэтому соотношение (1.10) выполняется и, следовательно, $\mathbf{P}(L_1) = 1$.

II. Из условия $\mathscr{L}_2$ следует, что $\mathbf{P}(L_1) = 1$. Рассмотрим процесс $y_t = x_{c-t}$, полученный обращением времени в процесс x_t. Событие L_1 для процесса y_t обозначим через L_1'. Из условия $\mathscr{L}_2$ вытекает условие $\mathscr{L}_1$ для процесса y_t, следовательно, $\mathbf{P}(L_1') = 1$. Остается заметить, что $L_1 \cap L_1' \subseteq L_2$ и, следовательно, $\mathbf{P}(L_2) = 1$.

§ 1.3. Необходимые условия непрерывности

Пусть $U, V \in \mathfrak{B}$. Определим величину $\nu(U, V)$ следующим образом. Если существует последовательность моментов времени

$$0 \leqslant s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_n < t_n \leqslant c$$

такая, что $x_{s_i} \in U$, $x_{t_i} \in V$, но не существует аналогичной последовательности из $2n+2$ моментов, то полагаем $\nu(U, V) = n$.

Лемма 1.4. *Пусть $\mathbf{P}(K \cap L_0) = 1$, $U, V \in \mathfrak{A}$, $\rho(U, V) > 0$. Тогда для того, чтобы выполнялось условие $\mathscr{L}(U, V)$, достаточно, чтобы существовало множество $W \in \mathfrak{A}$ такое, что*

$$\rho(U, \overline{W}) > 0, \quad \rho(W, V) > 0, \quad \mathbf{M}\nu(U, \overline{W}) < \infty. \tag{1.11}$$

Доказательство. Положим,

$$\alpha_1 = \tau(0, U), \quad \beta_1 = \tau(\alpha_1, [\overline{W}]), \quad \alpha_2 = \tau(\beta_1, U), \quad \beta_2 = \tau(\alpha_2, [\overline{W}]), \ldots.$$

Проверим выполнение условий III, IV леммы 1.3 для случайных величин α_i, β_i и множеств U, V (выполнение условий I, II очевидно). Положим

$$A = \bigcap_i \left[\{\alpha_i = \beta_i\} \cup \{\beta_i = c\} \cup N_{\beta_i} \cup \{x_t \text{ непрерывна в момент } \beta_i\}\right].$$

Докажем, что

$$L_0 \cap K \subseteq A. \tag{1.12}$$

Действительно, пусть $\omega \in L_0 \cap K$ и для некоторого i $\alpha_i < \beta_i < c$, тогда на интервале (α_i, β_i) $x_t \in [W]$. Существует такой интервал $(a, b) \in \mathfrak{L}$, что $\beta_i \in (a, b]$. Если $\beta_i \in (a, b)$, то x_t непрерывна в момент β_i, так как $\omega \in L_0$. Если $\beta_i = b$, то происходит событие N_{β_i}, так как $\omega \in K$. Соотношение (1.12) доказано, следовательно условие III выполняется. Условие IV выполняется в силу того, что $\mathbf{M}\nu(U, \overline{W}) < \infty$.

Лемма 1.5. I. *Пусть $\mathbf{P}(K \cap L_1) = 1$, $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$, и пусть существует множество $W \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее требованиям* (1.11), *тогда выполняется условие $\mathscr{L}(U, V)$.*

II. *Пусть $\mathbf{P}(K \cap L_2) = 1$, $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$, и пусть существует множество $W \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее требованиям* (1.11) *тогда выполняются условия $\mathscr{L}(U, V)$, $\mathscr{L}(V, U)$.*

Доказательство. I. Положим

$$\alpha_1 = \tau(0, U),\ \beta_1 = \tau(\alpha_1, [\overline{W}]),\ \alpha_2 = \tau(\beta_1, U),\ \beta_2 = \tau(\alpha_2, [\overline{W}]),\ \ldots$$

и проверим выполнение условия III леммы 1.3 для величин α_i, β_i и множеств U, V (выполнимость условий I, II, IV очевидна). Положим

$$B = \bigcap_i [\{\alpha_i = \beta_i\} \cup \{\beta_i = c\} \cup \{x_t \text{ непрерывна в момент } \beta_i\}]$$

и убедимся, что

$$K \cap L_1 \subseteq B. \tag{1.13}$$

Действительно, пусть $\omega \in K \cap L_1$ и для некоторого i $\alpha_i < \beta_i < c$. Тогда $x_t \in [W]$ на интервале (α_i, β_i). Так как $\omega \in L_1$, то $\beta_i \in (a, b) \in \mathfrak{L}$ и x_t непрерывна в момент β_i. Соотношение (1.13) доказано, $\mathbf{P}(B) = 1$, следовательно, условие III выполняется.

II. Рассмотрим процесс $y_t = x_{c-t}$, полученный обращением времени в процессе x_t. Для процесса y_t в силу п. I леммы 1.5 выполняется условие $\mathscr{L}(U, V)$, т. е.

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{y_t \in U,\ y_{t+h} \in V\}\, dt = o(h),\ h \to +0. \tag{1.14}$$

Левая часть (1.14) равна

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in V,\ x_{t+h} \in U\}\, dt,$$

следовательно, условие $\mathscr{L}(V, U)$ выполняется.

Из лемм 1.4 и 1.5 следует.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbf{P}(K \cap L_i) = 1$ $(i = 0, 1, 2)$, X *— сепарабельно,* $\mathbf{M}\nu(U, V) < \infty$ *для любых* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, *удовлетворяющих условию* $\rho(U, V) > 0$, *тогда выполняется условие* $\mathscr{L}_i$.

Глава II

ДРУГИЕ ФОРМЫ УСЛОВИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§ 2.1. Критерии непрерывности для процессов, не имеющих разрывов второго рода

Пусть X сепарабельно, $Y \subset X$ — открытое множество, $\mathfrak{A}$ — система всех открытых множеств U, для которых $\rho(U, \overline{Y}) > 0$, и пусть $\mathbf{P}(I) = 1$. Так как $I \subseteq K$, то можно применять результаты предыдущей главы. Эти результаты можно усилить.

Рассмотрим следующие условия;

а) Условие $\widetilde{\mathscr{L}}_0$: *каковы бы ни были точки* $x, y \in Y$, $x \neq y$, *существуют такие окрестности* U, V *точек* x, y, *что выполняется условие* $\mathscr{L}(U, V)$.

б) Условие $\widetilde{\mathscr{L}}_1$: *каковы бы ни были точка* $x \in Y$ *и* $V \in \mathfrak{B}(\rho(x, V) > 0)$, *существует такая окрестность* U *точки* x, *для которой выполняется условие* $\mathscr{L}(U, V)$.

в) Условие $\widetilde{\mathscr{L}}_2$: *каковы бы ни были точка* $x \in Y$ *и* $V \in \mathfrak{B}(\rho(x, V) > 0)$ *существует такая окрестность* U *точки* x, *для которой выполняются условия* $\mathscr{L}(U, V)$ *и* $\mathscr{L}(V, U)$.

г) Условие $\widetilde{\mathscr{L}}_0(X)$: *каковы бы ни были точки* $x, y \in X$, $x \neq y$ *существуют такие окрестности* U, V *точек* x, y, *для которых выполняется условие* $\mathscr{L}(U, V)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{P}(I) = 1$ *и выполняется условие* $\widetilde{\mathscr{L}}_0(X)$, *тогда* $\mathbf{P}(L) = 1$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{P}(I) = 1$ *и выполняется условие* $\widetilde{\mathscr{L}}_0$, *тогда* $\mathbf{P}(L_0) = 1$.

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 аналогичны доказательству теоремы 1.1.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathbf{P}(I) = 1$ *и выполняется условие* $\widetilde{\mathscr{L}}_i$ $(i = 1, 2)$, *тогда* $\mathbf{P}(L_i) = 1$.

Доказательство теоремы 2.3 аналогично доказательству теоремы 1.2.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{P}(L) = 1$ *и пусть каковы бы ни были точки* x, $y \in X$, $x \neq y$, *для некоторых окрестностей* U, V *точек* x, y *существует* $\mathbf{M}\nu(U, V)$, *тогда выполняется условие* $\widetilde{\mathscr{L}}_0(X)$.

Представляет также интерес следующее более сильное утверждение.

Теорема 2.4′. *Пусть* $\mathbf{P}(L) = 1$, U, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$. *Для того чтобы выполнялось условие* $\mathscr{L}(U, V)$, *достаточно существования множества* $W \in \mathfrak{B}$ *такого, что* $\rho(U, W) > 0$, $\rho(V, \overline{W}) > 0$, $\mathbf{M}\nu(U, W) < \infty$.

Доказательства теорем 2.4 и 2.4′ аналогичны доказательству лемм 1.5.

Теорема 2.5. *Пусть* $\mathbf{P}(I \cap L_0) = 1$ *и пусть какова бы ни была точка* x *и* $V \in \mathfrak{B}$, $(\rho(x, V) > 0)$, *для некоторой окрестности* U *точки* x *существует* $\mathbf{M}\nu(U, V)$, *тогда выполняется условие* $\mathscr{L}_0$.

Доказательство теоремы 2.5 аналогично доказательству леммы 1.4.

Теорема 2.6. *Пусть* $\mathbf{P}(I \cap L_i) = 1$ $(i = 1, 2)$ *и пусть какова бы ни была точка* x *и* $V \in \mathfrak{B}$, $(\rho(x, V) > 0)$, *для некоторой окрестности* U *точки* x *существует* $\mathbf{M}\nu(U, V) < \infty$, *тогда выполняется условие* $\mathscr{L}_i$.

Доказательство теоремы 2.6 аналогично доказательствам лемм 1.4 или 1.5.

Согласно теореме 11.5, гл. VII [1] мартингал (полумартингал) с вероятностью 1, не имеет разрывов второго рода; согласно теореме 3.3 гл. VII [1] $\mathbf{M}\nu(U, V) < \infty$, если $U = (-\infty, a)$, $V = (b, +\infty)$, $a < b$. Поэтому теоремы 2.1—2.6 дают необходимые и достаточные условия непрерывности для мартингала (полумартингала). В частности, $\mathbf{P}(L) = 1$ тогда и только тогда, когда для любых a, b $(a < b)$ при $h \to +0$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t < a,\ x_{t+h} > b\}\, dt = o(h),$$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t > b,\ x_{t+h} < a\}\, dt = o(h).$$

Замечание. Пусть $U, V \in \mathfrak{B}$, $0 \leqslant s < t < v \leqslant c$. Положим

$$p(U, V, s, t, v) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{u \in (s,t)} \{x_u \in U\} \cap \{x_v \in V\}\Big),$$

$$q(U, V, s, h) = \int_s^{c-h} p(U, V, s, t, t+h)\, dt.$$

Если $\mathbf{P}(I) = 1$, то $\mathbf{P}(L) = 1$ тогда и только тогда, когда для любых $U, V \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющих условию $\rho(U, V) > 0$, и $s \in [0, c]$ имеет место соотношение $q(U, V, s, h) = o(h)$ $(h \to +0)$. Величины $q(U, V, s, h)$ не выражаются через двумерные распределения.

§ 2.2. Критерий $\mathscr{M}$

В настоящем параграфе рассматривается другая форма условий непрерывности, которая не требует сепарабельности пространства X. В случае сепарабельного пространства большинство результатов этого параграфа можно вывести из результатов главы I.

Рассмотрим следующие условия:

а) Условие $\mathscr{M}(U, \varepsilon)$:

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in U,\ \rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\}\, dt = o(h),\quad h \to +0 \quad (U \in \mathfrak{B}).$$

б) Условие $\mathscr{M}$: *для каждого* $U \in \mathfrak{A}$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *выполняется условие* $\mathscr{M}(U, \varepsilon)$.

в) Условие $\mathscr{M}(X)$: *для каждого* $\varepsilon > 0$ *выполняется условие* $\mathscr{M}(X, \varepsilon)$.

Положим,

$$\psi_\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(x, y) \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \rho(x, y) < \varepsilon. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Пусть* α, β *— случайные величины,* $\alpha \leqslant \beta \leqslant \tau(\alpha, \varepsilon)$, $\varepsilon < \delta$, *и пусть* $H(\alpha, \beta, V)$ *и* $H'(\alpha, \beta, V)$ *— события, рассмотренные в* § 1.1. *Тогда*

$$\mathbf{P}(H(\alpha, \beta, V_\delta(x_\alpha))) \leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \int_{\alpha(h)}^{\beta(h)} \frac{\psi_\delta(x_t, x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \int_{\alpha(h)}^{\beta(h)} \frac{\psi_\delta(x_\alpha, x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant \mathbf{P}(H'(\alpha, \beta, V_\delta(x_\alpha))).$$

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 1.1.

Теорема 2.7. *Если* $\mathbf{P}(K) = 1$ *и выполняется условие* $\mathscr{M}$, *то* $\mathbf{P}(L_1) = 1$.

Доказательство. Пусть $U \in \mathfrak{A}$ и $s \in [0, c)$. Положим

$$G(U, s, \varepsilon) = \bigcup_{t \in (s,c)} \Big[\bigcap_{u \in (s,t)} \{x_u \in U,\ \rho(x_u, x_s) < \varepsilon\} \cap \{\liminf_{v \downarrow t} \rho(x_v, x_s) \geqslant 2\varepsilon\}\Big],$$

$$\beta = \min(\tau(s, [\bar{U}]),\ \tau(s, \varepsilon)),$$

огда

$$G(U, s, \varepsilon) \subseteq H(s, \beta, V_{2\varepsilon}(x_s)).$$

Применяя лемму 2.1, имеем

$$\mathbf{P}(H(s, \beta, V_{2\varepsilon}(x_s))) \leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \int_s^\beta \frac{\psi_{2\varepsilon}(x_s, x_{t+h})}{h} dt \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{h \to +0} \mathbf{M} \int_0^{c-h} \frac{\chi_{[U]}(x_t)\psi_\varepsilon(x_s, x_{t+h})}{h} dt =$$

$$= \liminf_{h \to +0} \int_0^{c-h} \frac{\mathbf{P}\{x_t \in [U],\ \rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\}}{h} dt = 0,$$

следовательно, $\mathbf{P}(G(U, s, \varepsilon)) = 0$. Пусть Y_n — множества, указанные в определении системы $\mathfrak{A}$. Положим

$$A = \bigcap_{s \in \Delta, n} G\left(Y_n, s, \frac{1}{n}\right).$$

Очевидно, $\mathbf{P}(A) = 0$. Можно показать, что $K \in \bar{A}L_1$, следовательно, $\mathbf{P}(L_1) = 1$.

Пусть $\mathcal{P}(U, \varepsilon)$ *— условие, согласно которому*

$$\sup_{t \in [0, c-h]} \mathbf{P}\{x_t \in U,\ \rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\} = o(h), \quad h \to +0 \ (U \in \mathfrak{B},\ \varepsilon > 0),$$

а $\mathcal{P}$ *— условие, заключающееся в том, что для каждого* $U \in \mathfrak{A}$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $\mathcal{P}(U, \varepsilon)$. Из теоремы 2.7 вытекает

Следствие. *Если* $\mathbf{P}(K) = 1$ *и выполняется условие* $\mathcal{P}$, *то* $\mathbf{P}(L_1) = 1$.

Это предложение справедливо без предположения об измеримости процесса. Для доказательства положим

$$t_k^n = \frac{ck}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$C_n(U, \varepsilon) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{x_{t_k^n} \in U,\ \rho(x_{t_k^n}, x_{t_{k+1}^n}) > \varepsilon\},$$

$$D(U, \varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n(U, \varepsilon).$$

Пусть $U \in \mathfrak{A}$, тогда из условия $\mathcal{P}$ вытекает, что $\mathbf{P}(C_n(U, \varepsilon)) = o(1)$, $n \to \infty$, следовательно, $\mathbf{P}(D(U, \varepsilon)) = 0$. Пусть $G(U, s, \varepsilon)$ — событие, рассмотренное при доказательстве теоремы 2.7. Можно доказать, что $G(U, s, \varepsilon)) \subseteq D(U, \varepsilon)$, следовательно, при каждом $U \in \mathfrak{A}$, $s \in [0, c]$ и $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(G(U, s, \varepsilon)) = 0$, откуда вытекает, что $\mathbf{P}(L_1) = 1$.

В указанном предложении ограничение на разрывы второго рода можно ослабить. Соответствующая теорема будет приведена в § 2.3.

Определим величину $\nu(U, \varepsilon)$ *следующим образом. Если существует последовательность моментов времени*

$$0 \leqslant s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_n < t_n \leqslant c$$

такая, что $x_{s_i} \in U$, $\rho(x_{s_i}, x_{t_i}) > \varepsilon$, *но не существует аналогичной последовательности из* $2n+2$ *моментов, то полагаем* $\nu(U, \varepsilon) = n$.

Лемма 2.2. *Если* $\mathbf{P}(K \cap L_1) = 1$, $U \in \mathfrak{A}$ *и* $\mathbf{M}\nu(U, \varepsilon) < \infty$, *то выполняется условие* $\mathcal{M}(U, 3\varepsilon)$.

Доказательство. Положим

$$\alpha_1 = \tau(0, U),\ \beta_1 = \tau(\alpha_1, \varepsilon),\ \alpha_2 = \tau(\beta_1, U),\ \beta_2 = \tau(\alpha_2, \varepsilon), \ldots,$$

тогда

$$\int_0^{c-h} \frac{\chi_U(x_t)\,\psi_{3\varepsilon}(x_t, x_{t+h})}{h}\,dt \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\beta_i^{(h)}} \frac{\psi_{3\varepsilon}(x_t, x_{t+h})}{h}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\beta_i^{(h)}} \frac{\psi_{2\varepsilon}(x_{\alpha_i}, x_{t+h})}{h}\,dt.$$

Используя лемму 2.1 и равенство $\mathbf{P}(K \cap L_1) = 1$, можно показать, что при каждом i

$$\mathbf{M} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\beta_i^{(h)}} \frac{\psi_{2\varepsilon}(x_{\alpha_i}, x_{t+h})}{h}\,dt = o(1),\ h \to +0. \tag{2.1}$$

Далее, из соотношения $\mathbf{M}\nu(U, \varepsilon) < \infty$ следует, что

$$\mathbf{M} \max\{n : \alpha_n < \beta_n\} < \infty. \tag{2.2}$$

Методом, аналогичным методу доказательства леммы 1.3, из (2.1) и (2.2) можно вывести, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{M} \int_0^{c-h} \frac{\chi_U(x_t)\,\psi_{3\varepsilon}(x_t, x_{t+h})}{h}\,dt = o(1),\ h \to +0,$$

и, следовательно, при каждом $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in U,\ \rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\}\,dt = o(h),\ h \to +0.$$

Из леммы 2.2 вытекает

Теорема 2.8. *Пусть* $\mathbf{P}(K \cap L_1) = 1$ *и пусть для любых* $U \in \mathfrak{A}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* $\mathbf{M}\nu(U, \varepsilon)$, *тогда выполняется условие* $\mathcal{M}$.

Лемма 2.3. *Если* $\mathbf{P}(I) = 1$, то $\mathcal{M}(X, \varepsilon)$ — *достаточное условие равенства* $\mathbf{P}(L^s) = 1$.

Доказательство. Пусть $\delta > \varepsilon$, $\varepsilon + \gamma < \delta$. Применяя лемму 2.1, имеем:

$$\mathbf{P}(H(s, \tau(s, \gamma), V_\delta(x_s))) \leqslant \limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \int_s^{\tau^{(h)}(s,\gamma)} \frac{\psi_\delta(x_s, x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \int_s^{\tau^{(h)}(s,\gamma)} \frac{\psi_\varepsilon(x_t, x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant \limsup_{h \to +0} \int_0^{c-h} \frac{\mathbf{P}\{\rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\}}{h}\, dt = 0.$$

Остается заметить, что

$$I \cap \overline{L^\varepsilon} \subseteq \bigcup_{s \in \Lambda, n} H\left(s, \tau\left(s, \frac{1}{n}\right), V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(x_s)\right).$$

следовательно, $\mathbf{P}(I \cap \overline{L^\varepsilon}) = 0$, откуда $\mathbf{P}(L^\varepsilon) = 1$

Теорема 2.9. *Пусть* $\mathbf{P}(I) = 1$. *Тогда*

I. *Для того чтобы* $\mathbf{P}(L^\varepsilon) = 1$, *достаточно, чтобы при каждом* $\delta > \varepsilon$ *выполнялось условие* $\mathscr{M}(X, \delta)$.

II. *Для того чтобы* $\mathbf{P}(L) = 1$, *достаточно, чтобы выполнялось условие* $\mathscr{M}(X)$.

Первая часть теоремы 2.9 вытекает из леммы 2.3, так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} L^{\varepsilon + 1/n} = L^\varepsilon$. Вторая часть теоремы является следствием первой.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathbf{P}(L^\varepsilon) = 1$, $\mathbf{M}\nu_\delta < \infty$, *и пусть* γ *таково, что* $\gamma \geqslant \varepsilon + 2\delta$, *тогда выполняется условие* $\mathscr{M}(X, \gamma)$.

Доказательство. Положим

$$\alpha_1 = \tau(0, \delta),\ \alpha_2 = \tau(\alpha_1, \delta), \ldots,\ \alpha_n = \tau(\alpha_{n-1}, \delta), \ldots,$$

тогда имеем:

$$\int_0^{c-h} \frac{\mathbf{P}\{\rho(x_t, x_{t+h}) > \gamma\}}{h}\, dt = \mathbf{M} \int_0^{c-h} \frac{\psi_\gamma(x_t, x_{t+h})}{h}\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{M} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\alpha_{i+1}^{(h)}} \frac{\psi_\gamma(x_t, x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\alpha_{i+1}^{(h)}} \frac{\psi_{\gamma-\delta}(x_{\alpha_i}, x_{t+h})}{h}\, dt. \qquad (2.3)$$

Заметим, что

$$\{x^+_{\alpha_{i+1}} \in V_{\gamma-\delta}(x_{\alpha_i})\} \subseteq \{\rho(x^-_{\alpha_{i+1}},\ x^+_{\alpha_{i+1}}) \geqslant \gamma - 2\delta\} \subseteq \{\rho(x^-_{\alpha_{i+1}},\ x^+_{\alpha_{i+1}}) > \varepsilon\}.$$

Так как $\mathbf{P}(L^\varepsilon) = 1$, то $\mathbf{P}\{x^+_{\alpha_{i+1}} \in V_{\gamma-\delta}(x_{\alpha_i})\} = 0$. Применяя лемму 2.1, имеем:

$$\limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \int_{\alpha_i^{(h)}}^{\alpha_{i+1}^{(h)}} \frac{\psi_{\gamma-\delta}(x_{\alpha_i}, x_{t+h})}{h}\, dt \leqslant \mathbf{P}\{x^+_{\alpha_{i+1}} \in V_{\gamma-\delta}(x_{\alpha_i})\} = 0.$$

Используя это соотношение и метод доказательства леммы 1.3, можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{M} \int_{a_i^{(h)}}^{a_{i+1}^{(h)}} \frac{\psi_{\gamma-\delta}(x_{a_i}, x_{t+h})}{h}\, dt = o(1), \quad h \to +0,$$

откуда в силу (2.3) следует условие $\mathscr{M}(X, \gamma)$.

Теорема 2.10. I. *Если* $\mathbf{P}(L^{\varepsilon}) = 1$ *и при каждом* $\gamma > 0$ $\mathbf{M}\nu_{\gamma} < \infty$, *то для каждого* $\delta > \varepsilon$ *выполняется условие* $\mathscr{M}(X, \delta)$.

II. *Если* $\mathbf{P}(L) = 1$ *и при каждом* $\gamma > 0$ $\mathbf{M}\nu_{\gamma} < \infty$, *то выполняется условие* $\mathscr{M}(X)$.

Первая часть теоремы 2.10 является следствием леммы 2.4, а вторая часть является следствием первой.

Вернемся к примеру Рея, рассмотренному во введении. Для процесса Рея условие $\mathscr{M}(X)$ не имеет места, однако это условие выполняется для системы $\mathfrak{A}$ ограниченных открытых множеств плоскости. Действительно, пусть $V \in \mathfrak{A}$ — ограниченное множество. Тогда $\nu(U, \varepsilon) \leqslant d/\varepsilon$, где d — диаметр множества U, следовательно, $\mathbf{M}\nu(U, \varepsilon) \leqslant d/\varepsilon < \infty$, и согласно теореме 2.8 условие $\mathscr{M}$ выполняется.

Видоизменим пример Рея, предполагая плотность $p_{\varphi}(x)$ распределения полярного угла φ не постоянной, а стремящейся к 0 при $x \to 0$. Тогда условие $\mathscr{M}(X)$ будет выполняться, даже если $\mathbf{M}\nu(X, \varepsilon) = \infty$. Для того чтобы $\mathbf{M}\nu(X, \varepsilon) = \infty$, достаточно, чтобы расходился в нуле интеграл

$$\int \frac{p_{\varphi}(x)}{h}\, dx.$$

§ 2.3. Критерий $\mathscr{P}$

Пусть $U \subset X$ — открытое множество. Обозначим через $d_U(a, b)$ диаметр множества $U \cap \left(\bigcap_{t \in (a,b) \cap [0,c]} x_t \right)$. Мы будем говорить, что x_t не имеет разрывов второго рода относительно U, если при любом $t \in [0, c]$ $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} d_U(t, t + \varepsilon) = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} d_U(t - \varepsilon, t) = 0$.

Положим

$$I(U) = \{x_t \text{ не имеет разрывов второго рода относительно } U\},$$

$$I = \bigcap_{U \in \mathfrak{A}} I(U).$$

Имеет место следующая

Теорема 2.11. *Пусть* $\mathbf{P}(I) = 1$ *и пусть выполняется условие* $\mathscr{N}$, *тогда* $\mathbf{P}(L_1) = 1$ (измеримость процесса не предполагается).

Заметим, что условие $\mathbf{P}(I) = 1$ менее ограничительно, чем условие $\mathbf{P}(K) = 1$.

В силу следствия из теоремы 2.7, для доказательства теоремы 2.11 достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2.5. *Пусть* $\mathbf{P}(I) = 1$ *и пусть выполняется условие* $\mathscr{N}$, *тогда* $\mathbf{P}(K) = 1$.

Доказательство. Пусть U — открытое множество. Фиксируем $t \in [0, c]$, $(s < t)$ и положим

$$t_k^n = s + \frac{(t-s)\,k}{n},$$

$$A_n = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{x_{t_k^n} \in U,\ \rho(x_{t_k^n}, x_{t_{k+1}^n}) > \varepsilon\},$$

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n,$$

$$C(U, s, t, \varepsilon) = \{x_s \in \overline{U}\} \cup \{x_t \in U\} \cup \bigcup_{r \in [s,t]} \{0 < \rho(x_r, \overline{U}) \leqslant \varepsilon\}.$$

Докажем, что $\mathbf{P}(C(U, s, t, \varepsilon)) = 1$, если выполняется условие $\mathscr{P}(U, \varepsilon)$. Из условия $\mathscr{P}(U, \varepsilon)$ следует, что $\mathbf{P}(A_n) = o(1)$, $n \to \infty$, поэтому $\mathbf{P}(B) = 1$. Докажем, что $B \subseteq C(U, s, t, \varepsilon)$. Пусть $\omega \in B$, $x_s \in U$, $x_t \in U$. По определению события B найдется такое n, что $\rho(x_{t_k^n}, x_{t_{k+1}^n}) \leqslant \varepsilon$ для всех k, при которых $x_{t_k^n} \in U$. Положим $m = \min\{k : x_{t_{k+1}^n} \in \overline{U}\}$. Очевидно, $0 < \rho(x_{t_m^n}, \overline{U}) < \varepsilon$, $s \leqslant t_m^n < t$. Следовательно, $B \subseteq C(U, s, t, \varepsilon)$, и поэтому $\mathbf{P}(C(U, s, t, \varepsilon)) = 1$.

Пусть Y_n — множества, указанные в определении системы $\mathfrak{A}$. Без ограничения общности можно считать, что при каждом n $\rho(Y_n, \overline{Y_{n-1}}) > 0$. Положим

$$C = \bigcap_{s,t \in \Delta,\, s<t;\, n} C\left(Y_n, s, t, \frac{1}{n}\right),$$

тогда $\mathbf{P}(C) = 1$. Положим, далее,

$$D_1 = \bigcap_{t \in (0,c]} \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lim_{s \uparrow t} \chi_{Y_n}(x_s) = 0\}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lim_{s \uparrow t} \chi_{Y_n}(x_s) = 1\}\right)\right],$$

$$D_2 = \bigcap_{t \in [0,c)} \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lim_{s \downarrow t} \chi_{Y_n}(x_s) = 0\}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lim_{s \downarrow t} \chi_{Y_n}(x_s) = 1\}\right)\right].$$

и докажем, что $\mathbf{P}(D_1) = 1$. Сначала докажем, что $\overline{D}_1 \cap C \subseteq \overline{I}$. Пусть $\omega \in \overline{D}_1 \cap C$. Так как $\omega \in \overline{D}_1$ и процесс сепарабелен, то существуют $t \in (0, c]$, номер n и две последовательности $s_i \uparrow t$, $t_i \uparrow t$ такие, что $s_i, t_i \in \Lambda$, $x_{s_i} \in Y_n$, $x_{t_i} \in \overline{Y}_{n+2}$. Далее, так как $\omega \in C$, то для каждого i найдется такое u_i, что $s_i < u_i < t_i$, $x_{u_i} \in Y_{n+2} \setminus Y_{n+1}$. Наконец, так как $\rho(x_{s_i}, x_{u_i}) \geqslant \rho(Y_n, \overline{Y}_{n+1}) > 0$, то $\omega \in \overline{I}$. Итак доказано, что $\overline{D}_1 \cap C \subseteq \overline{I}$ и $\mathbf{P}(C) = 1$, кроме того, по условию $\mathbf{P}(I) = 1$, следовательно, $\mathbf{P}(D_1) = 1$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{P}(D_2) = 1$. Остается заметить, что $D_1 \cap D_2 \cap I \subseteq K$ и поэтому $\mathbf{P}(K) = 1$.

Глава III

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В главе III будет предполагаться, что X представляет собой полное метрическое пространство.

§ 3.1. Леммы

В этом параграфе даются некоторые обобщения результатов Кинни [3], относящихся к критериям отсутствия разрывов второго рода.

Условимся через $\mathbf{P}_{s,x}(A)$ обозначать вероятность события A при условии, что $x_s = x$ (для тех событий, для которых эта условная вероятность рассматривается, она существует). Для однородного по времени марковского процесса будут обозначаться: через $\mathbf{P}_x(A)$ — вероятность события A при условии, что $x_0 = x$, а через $\mathbf{P}(t, x, U)$ $(t \in [0, c],\ x \in X,\ U \in \mathfrak{B})$ — стационарная переходная функция.

Лемма 3.1. *Пусть $\{\xi_n, x_n\}$ последовательность пар величин, связанных в цепь Маркова, причем*

$$0 \leqslant \xi_n \leqslant c; \quad \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n \leqslant \ldots,$$
$$x_n \in X, \quad \mathbf{P}\{x_n \in Y\} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots; \quad Y \in \mathfrak{B}),$$

и при некотором $h > 0$

$$\inf_{x,s,n} \mathbf{P}\{\xi_{n+1} \geqslant \min(s + h, c) / \xi_n = s,\ x_n = x\} \geqslant p > 0,$$

где $x \in Y$, $s \in [0, c]$. В таком случае, если $\nu = \max\{n;\ \xi_n < c\}$, то $\mathbf{M}\nu \leqslant \dfrac{c+h}{ph}$.

Доказательство. Обозначим через ν_k количество величин ξ_n, попавших в интервал $[kh, \min((k+1)h, c)]$. Пользуясь тем, что последовательность $\{\xi_n, x_n\}$ представляет собой цепь Маркова, можно доказать, что $\mathbf{P}\{\nu_k > m\} \leqslant (1-p)^m$, следовательно, $\mathbf{M}\nu_k = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_k > m\} \leqslant \frac{1}{p}$. Обозначая через $[r]$ наибольшее целое число, не превосходящее r, имеем:

$$\nu = \sum_{k=0}^{\left[\frac{c}{h}\right]} \nu_k; \quad \mathbf{M}\nu = \sum_{k=0}^{\left[\frac{c}{h}\right]} \mathbf{M}\nu_k \leqslant \frac{\frac{c}{h}+1}{p} = \frac{c+h}{ph}.$$

Лемма 3.2. *Пусть U, $V \subset X$ — открытые множества, для которых при некотором $h > 0$ выполняется условие*

$$\inf_{x,s} \mathbf{P}_{s,x}\{\tau(s, V) > h\} = p > 0, \tag{3.1}$$

где $x \in U$, $s \in [0, c-h]$, тогда $\mathbf{M}\nu(U, V) < \infty$.

Доказательство. Пусть $\{\Lambda_n\}$ — последовательность конечных множеств $\Lambda_n \subset \Lambda$ таких, что

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots, \quad \bigcup_n \Lambda_n = \Lambda.$$

По аналогии с $\nu(U, V)$ рассмотрим величину $\nu_n(U, V)$, равную количеству переходов из U в V на множестве Λ_n. Очевидно,

$$\nu_1(U, V) \leqslant \nu_2(U, V) \leqslant \ldots . \tag{3.2}$$

Так как процесс сепарабельный, то

$$\nu(U, V) = \lim_{n \to \infty} \nu_n(U, V), \tag{3.3}$$

причем согласно условию (3.1) и в силу леммы 3.1

$$\mathbf{M}\nu_n(U, V) \leqslant \frac{c+h}{ph}. \tag{3.4}$$

Из (3.2) — (3.4) следует, что $\mathbf{M}\nu(U, V) \leqslant \frac{c+h}{ph} < \infty$.

Рассмотрим следующие условия:

а) Условие $\mathcal{R}$: *если* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$, *то при некотором* $h > 0$

$$\sup_{x, s, t} \mathbf{P}(s, x, t, U) < 1,$$

где $x \in V$; $s, t \in [0, c]$; $0 < t - s \leqslant h$.

б) Условие $\mathcal{S}$: *если* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$, *то при* $h \to +0$

$$\sup_{x, s, t} \mathbf{P}(s, x, t, V) = o(1),$$

где $x \in U$; $s, t \in [0, c]$; $0 < t - s \leqslant h$.

в) Условие $\mathcal{T}$ (*для однородных по времени процессов*): *если* $x \in Y$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(x, V) > 0$, *то для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* h, $0 < h < \varepsilon$, *и такую окрестность* U *точки* x, *что*

$$\sup_{x \in U} \mathbf{P}(h, x, V) < \varepsilon.$$

г) Условие $\mathcal{Q}$: *выполняются условия* $\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{S}$.

д) Условие $\mathcal{G}$: *при каждом* $\varepsilon > 0$ *и* $h \to +0$

$$\sup_{x, s, t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = o(1),$$

где $x \in X$; $s, t \in [0, c]$, $0 < t - s \leqslant h$.

Замечание. Из условия $\mathcal{G}$ вытекает условие $\mathcal{Q}$.

Лемма 3.3. *Пусть выполняется условие* $\mathcal{Q}$ *и пусть* $U \in \mathfrak{A}$, V — *открытое множество* $\rho(U, V) > 0$. *Тогда при некотором* $h > 0$

$$\inf_{x \in U,\, s \in [0, c)} \mathbf{P}_{s, x}\{\tau(s, V) \geqslant \min(s + h, c)\} > 0.$$

Доказательство. Пусть $S \subset [0, c]$ — конечное множество, $s \in [0, c)$. Положим

$$\tau_S(s, V) = \min\{t: t \in [s, c] \cap S;\ x_t \in V\},$$

$$d = \min(s + h, c),$$

$$A_S = \{\tau_S(s, V) < d\},$$

$$B = \{x_d \in W\},$$

где $W \in \mathfrak{B}$, причем $\rho(U, V) > 0$, $\rho(V, \overline{W}) > 0$. Очевидно,

$$A_s \cap B \subseteq B. \tag{3.5}$$

Пусть $x \in U$; в силу известных свойств марковского процесса можно доказать, что

$$\mathbf{P}_{s,x}(A_S \cap B) \geqslant \mathbf{P}_{s,x}(A_S) \inf_{y,s,t} \mathbf{P}(s, y, t, W), \tag{3.6}$$

где $y \in V$; $s, t \in [0, c]$, $0 < t - s \leqslant h$. Кроме того,

$$\mathbf{P}_{s,x}(B) = \mathbf{P}(s, x, d, W). \tag{3.7}$$

Из (3.5) — (3.7) следует, что

$$\mathbf{P}_{s,x}(A_S) \inf_{y,s,t} \mathbf{P}(s, y, t, W) \leqslant \mathbf{P}(s, x, d, W). \tag{3.8}$$

В силу условия $\mathcal{R}$ существуют такие $h > 0$, $k > 0$, что

$$\inf_{y,s,t} \mathbf{P}(s, y, t, W) > k. \tag{3.9}$$

Согласно условию $\mathcal{S}$ можно выбрать такое $h' < h$, что

$$\sup_{x,s,t} \mathbf{P}(s, x, t, W) < \frac{k}{2}, \tag{3.10}$$

где

$$x \in U;\ s, t \in [0, c];\ 0 < t - s \leqslant h'.$$

Из (3.8) — (3.10) следует, что при некотором $h > 0$

$$\sup_{x \in U,\ s \in [0,c)} \mathbf{P}_{s,x}(A_S) < \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Оценка (3.11) остается справедливой, если S — счетное множество, например $S = \Lambda$. Из сепарабельности процесса следует, что $A_\Lambda = \{\tau(s, V) < d\}$. Лемма доказана.

Замечание. Метод доказательства леммы 3.3 встречается в доказательствах леммы 1 [2] и теоремы V [3].

Для однородных по времени процессов лемму 3.3 можно усилить.

Лемма 3.4. *Пусть x_t — однородный по времени процесс в локально-компактном и σ-компактном пространстве X (элементы системы $\mathfrak{A}$ компактны), и пусть выполняются условия $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$, $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$. Тогда при некотором $h > 0$*

$$\inf_{x \in U} \mathbf{P}_x\{\tau(0, V) \geqslant h\} > 0.$$

Доказательство. Пусть $x \in U$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(x, V) > 0$ и пусть $S \in [0, c]$ — конечное множество. Положим $A_S = \{\tau_S(0, V) < h\}$. Методом, аналогичным методу доказательства леммы 3.3, можно доказать, что для некоторой окрестности $U(x)$ точки x найдется такое $h > 0$, что

$$\sup_{y \in U(x)} \mathbf{P}_y(A_S) < \frac{1}{2}. \tag{3.12}$$

Пусть, далее, $U \in \mathfrak{A}$ и $\rho(U, V) > 0$. Покроем каждую точку x множества $[U]$ окрестностью $U(x)$, для которой выполняется неравенство (3.12). Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, следовательно, при некотором $h > 0$

$$\sup_{y \in U} \mathbf{P}_y(A_S) < \frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Из (3.13) можно легко вывести утверждение леммы.

Лемма 3.5. *Пусть выполняется условие* $\mathcal{G}$. *Тогда*

I. *Если* $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$, $\rho(U, V) > 0$, *то* $\mathbf{M}_\nu(U, V) < \infty$.

II. *Если элементы системы* $\mathfrak{A}$ *компактны, то* $\mathbf{P}(\mathcal{G}) = 1$.

Первая часть леммы 3.5 является следствием лемм 3.2 и 3.3, а вторая часть является следствием первой.

Замечание. Вторая часть леммы 3.5 является обобщением теоремы VI (III) [3] Кинни.

Лемма 3.6. *Если выполняется условие* $\mathcal{G}$, *то при каждом* $\varepsilon > 0$ $\mathbf{M}_\nu(X, \varepsilon) < \infty$.

Лемму 3.6 можно доказать, используя метод доказательства теоремы V [3] Кинни.

Лемма 3.7 *Пусть* $U \subseteq X$ *- открытое множество и пусть при каждом* $\varepsilon > 0$ *и* $h \to +0$

$$\sup_{x, s, t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = o(1),$$

где $x \in U$, $s, t \in [0, c]$, $0 < t - s < h$, *тогда* $\mathbf{P}(I(U)) = 1$, *где* $I(U)$ *— событие, рассмотренное в* § 2.3.

Доказательство. Применяя схему доказательства леммы 3.3 к событиям

$$A = \{\tau_S(s, U \cap V_\varepsilon(x)) < d\} \text{ и } B = \{x_d \in V_{\varepsilon/2}(x)\},$$

где $d = \min(s + h, c)$, убеждаемся, что

$$\sup_{x \in U,\ s \in [0, c)} \mathbf{P}_{s, x}(A) < 1.$$

Далее, используя метод доказательства теоремы V [3] Кинни, можно доказать, что $\mathbf{P}(I(U)) = 1$.

§ 3.2. Критерии непрерывности

Теорема 3.1. *Пусть* x_t *— марковский процесс в локально компактном и* σ*-компактном пространстве* X, $\mathfrak{A}$ *— система компактных открытых множеств, и пусть выполняется условие* $\mathcal{G}$, *тогда для того, чтобы* $\mathbf{P}(L_i) = 1$ $(i = 0, 1, 2)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\mathcal{L}_i$.

Доказательство. Достаточность. Согласно лемме 3.5 из условия $\mathcal{Q}$ следует, что $\mathbf{P}(K) = 1$, поэтому можно применить теоремы 1.1 и 1.2.

Необходимость. Согласно лемме 3.5, из условия $\mathcal{Q}$ вытекает, что $\mathbf{P}(K) = 1$ и $\mathbf{M}_\nu(U, V) < \infty$ (если $U \in \mathfrak{A}$, $\rho(U, V) > 0$). Далее, остается применить теорему 1.3.

Теорема 3.1′. *Пусть x_t — однородный по времени процесс в локально компактном и σ-компактном пространстве X, система $\mathfrak{A}$ состоит из компактных открытых множеств, и пусть выполняются условия $\mathcal{R}$ и $\mathcal{T}$. Тогда для того, чтобы $\mathbf{P}(L_i) = 1$ $(i = 0, 1, 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathcal{L}_i$.*

Теорема 3.1′ доказывается таким же методом, как и теорема 3.1, только вместо леммы 3.3, на которую опиралось доказательство теоремы 3.1, используется лемма 3.4.

Теорема 3.2. *Пусть x_t — марковский процесс, переходная функция которого удовлетворяет условию $\mathcal{G}$. Тогда выполнение условия $\mathcal{M}(X, \delta)$ для каждого $\delta > \varepsilon$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\mathbf{P}(L^\varepsilon) = 1$, а выполнение условия $\mathcal{M}(X)$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\mathbf{P}(L) = 1$.*

Доказательство. Достаточность. В силу теоремы Кинни ([3] теорема V) из условия $\mathcal{G}$ следует, что $\mathbf{P}(I) = 1$. Далее, применяем теорему 2.9.

Необходимость. В силу условия $\mathcal{G}$ и леммы 3.6 $\mathbf{M}_\nu(X, \varepsilon) < \infty$ при каждом $\varepsilon > 0$ и для доказательства необходимости остается применить теорему 2.10.

Следствие. *Если переходная вероятность $\mathbf{P}(t, x, V_\varepsilon(x))$ однородного по времени марковского процесса при любом $\varepsilon > 0$ не зависит от x, то $P(L) = 1$ тогда и только тогда, когда при каждом $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}(h, x, V_\varepsilon(x)) = o(h), \quad h \to +0.$$

Действительно, достаточность вытекает из теоремы 3.2 или критерия Дынкина—Кинни, сформулированного во введении. Необходимость также вытекает из теоремы 3.2, так как в силу того, что $\mathbf{P}(L) = 1$, имеем:

$$\mathbf{P}(h, x, V_\varepsilon(x)) = \mathbf{P}\{\rho(x_t, x_{t+h}) \geqslant \varepsilon\} = o(1), \quad h \to +0.$$

Замечание. Пусть $\Delta \subset [0, c]$ — измеримое множество и $U \in \mathfrak{B}$. Положим

$$\mu(\Delta, U) = \int_\Delta \mathbf{P}\{x_t \in U\}\, dt.$$

Величина $\mu(\Delta, U)$ равна математическому ожиданию времени пребывания траектории U на множестве моментов времени Δ. Условие $\mathcal{M}(X, \varepsilon)$ для марковского процесса можно записать в виде:

$$\int \mu(ds, dx) \widetilde{\mathbf{P}}(s, x, s + h, V_\varepsilon(x)) = o(h), \quad h \to +0.$$

где

$$\widetilde{\mathbf{P}}(s, x, t, U) = \begin{cases} \mathbf{P}(s, x, t, U), & \text{если } t \leqslant c, \\ 0, & \text{если } t > c, \end{cases}$$

причем предполагается, что $s < t$ и $U \in \mathfrak{B}$.

Рассмотрим теперь важный класс феллеровских процессов. Пусть $f(x)$ — $\mathfrak{B}$-измеримая функция на X. Введем обозначение

$$T_t f(x) = \int_X \mathbf{P}(t, x, dy) f(y).$$

Мы скажем, что *стационарная переходная функция удовлетворяет условию Феллера, если для всякой непрерывной ограниченной функции* $f(x)$ $(x \in X)$ *и произвольной положительной постоянной* t *функция* $T_t f(x)$ *непрерывна*. Соответствующий ей однородный по времени марковский процесс называется феллеровским (см. [6]).

Обозначим через $\mathscr{N}$ *условие, заключающееся в том, что* $\mathbf{P}(t, x, U_\varepsilon(x)) = o(1)$, $t \to +0$, *при каждом* $x \in Y$, $\varepsilon > 0$, *и через* $\mathscr{N}(X)$ *условие* $\mathbf{P}(t, x, V_\varepsilon(x)) = o(1)$, $t \to +0$, *при каждом* $x \in X$ *и* $\varepsilon > 0$.

Если переходная функция удовлетворяет условию Феллера и условию $\mathscr{N}$, то выполняется условие $\mathscr{T}$ (доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 3 [7]). Отсюда следует, что для феллеровского процесса теорема 3.1′ останется справедливой, если условие $\mathscr{T}$ заменить условием $\mathscr{N}$.

Если переходная функция удовлетворяет условию Феллера и условию $\mathscr{N}(X)$ и, кроме того, X — компактно, то выполняется условие $\mathscr{G}$. Для доказательства заметим, что в случае компактного простанства X из условия $\mathscr{N}(X)$ следует, что какова бы ни была непрерывная ограниченная функция $f(x)$ на X,

$$\sup_{x \in X} |T_t f(x) - f(x)| \to 0, \quad t \to +0$$

см. [6] теорема 5), поэтому условие $\mathscr{G}$ — выполняется. Таким образом, для феллеровского процесса в компактном пространстве X теорема 3.2 останется справедливой, если условие $\mathscr{G}$ заменить условием $\mathscr{N}(X)$.

Принимая во внимание сделанные замечания, легко доказать следующие теоремы.

Теорема 3.3. *Если переходная функция удовлетворяет условию Феллера и условию* $\mathscr{R}$, *пространство* X *локальнокомпактно и* σ-*компактно и элементы системы* $\mathfrak{A}$ *компактны, то* $\mathbf{P}_x(L_1) = 1$ *при любом* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* $\mathscr{N}$ *и для любых* $x \in X$, $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{B}$ $(\rho(U, V) > 0)$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}_x \{x_t \in U \; x_{t+h} \in V\} \, dt = o(h), \quad h \to +0.$$

Теорема 3.4. *Пусть переходная функция удовлетворяет условию Феллера и пространство* X — *компактно. Для того чтобы при любом* $x \in X$ *имело место равенство* $\mathbf{P}_x(L) = 1$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\mathscr{N}(X)$ *и для любых* $x \in X$ *и* $\varepsilon > 0$ *имело место соотношение*:

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}_x \{\rho(x_t, \; x_{t+h}) > \varepsilon\} \, dt = o(h), \quad h \to +0.$$

§ 3.3. Локальные аналоги критерия Дынкина—Кинни

Положим,

$$\varphi_\varepsilon(U, h) = \sup_{x,\, s,\, t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x)),$$

где $x \in U$; $s, t \in [0, c]$, $0 < t - s \leqslant h$.

Из леммы 3.7 и теоремы 2.11 вытекает

Теорема* 3.5. *Пусть x_t — марковский процесс, и пусть для каждого $U \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon(U, h) = o(h)$, $h \to +0$, тогда $\mathbf{P}(L_1) = 1$.*

Замечание. Для однородных по времени одномерных строго марковских процессов выполнение условия $\varphi_\varepsilon(U, h) = o(h)$, $h \to +0$, для каждого $U \in \mathfrak{A}$ и $\varepsilon > 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\mathbf{P}_x(L_1) = 1$ при любом $x \in X$. Необходимость можно доказать, видоизменив доказательство леммы V 4 [4].

Другой локальный аналог критерия Дынкина—Кинни представляет

Теорема 3.6. *Положим для $U \in \mathfrak{B}$.*

$$\psi_\varepsilon(U, h) = \sup_{x,\, s,\, t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x) \cap U),$$

где $x \in U$; $s, t \in [0, c]$, $0 < t - s \leqslant h$,

$$L_0(U) = \bigcap_{\substack{s,\, t \in [0,\, c] \\ s < t}} \Big[L(s, t) \cup \bigcup_{u \in (s,\, t)} \{x_u \in U\} \Big].$$

и пусть при каждом $\varepsilon > 0$ $\psi_\varepsilon(U, h) = o(h)$, $h \to +0$. Тогда $\mathbf{P}(L_0(U)) = 1$.

Доказательство. Используем метод доказательства теоремы 1 [2] Е. Б. Дынкина. Выберем произвольное конечное множество $S \subset [0, c]$ и пусть $s, t \in [0, c]$, $s < t$. Положим

$$\vartheta = \vartheta_s(S) = \min \{ t : t \in (s, c) \cap S, \quad x_t \in V_{2\varepsilon}(x_s) \cap U \},$$

$$A_S(s, t) = \{ x_s \in U, \ \vartheta_s(S) < t, \ x_t \in U \},$$

тогда

$$A_S(s, t) \subseteq \{ x_s \in U, \ x_t \in V_\varepsilon(x_s) \cap U \} \cup \{ x_s \in U, \ \vartheta < t, \ x_t \in V_\varepsilon(x_\vartheta) \cap U \}. \quad (3.14)$$

Пользуясь известными свойствами марковского процесса, можно доказать, что

$$\mathbf{P}\{ x_s \in U, \ x_t \in V_\varepsilon(x_s) \cap U \} \leqslant \psi_\varepsilon(U, t - s)\, \mathbf{P}\{ x_s \in U \} \leqslant \psi_\varepsilon(U, t - s), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{P}\{ x_s \in U, \ \vartheta < t, \ x_t \in V_\varepsilon(x_\vartheta) \cap U \} \leqslant \psi_\varepsilon(U, t - s)\, \mathbf{P}\{ x_s \in U, \ \vartheta < t \} \leqslant$$

$$\leqslant \psi_\varepsilon(U, t - s). \quad (3.16)$$

Из (3.14)—(3.16) следует, что

$$\mathbf{P}(A_S(s, t)) \leqslant 2\psi_\varepsilon(U, t - s). \quad (3.17)$$

Оценка (3.17) остается справедливой, если S — счетное множество. Положим

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_\Delta\Big(\frac{c(k-1)}{n}, \frac{c(k+1)}{n} \Big).$$

* Теорема 3.5 указана автору Е. Б. Дынкиным.

Из (3.17) следует, что $\mathbf{P}(B_n) = o(1)$, $n \to \infty$. Пусть последовательность $\{n_i\}$ такова, что $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_{n_i}) < \infty$. Обозначим через $d(t)$ колебание траектории в момент t и положим

$$C = \bigcup_{m} \bigcap_{i} \bigcap_{m} B_{n_i},$$

$$D_\varepsilon = \bigcap_{t \in [0,\, c]} \left[\{d(t) \leqslant 4\varepsilon\} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{s \in \left(t - \frac{1}{n},\ t + \frac{1}{n}\right)} \{x_s \in U\} \right) \right].$$

Тогда $\mathbf{P}(C) = 1$, $C \leqslant D_\varepsilon$ и, следовательно, $\mathbf{P}(D_\varepsilon) = 1$. Остается заметить, что $\bigcap_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon \leqslant L_0(U)$ и поэтому $\mathbf{P}(L_0(U)) = 1$.

§ 3.4. Обрывающиеся процессы

Если в определении переходной функции $\mathbf{P}(\ldots)$ в фазовом пространстве Z равенство $\mathbf{P}(s, x, t, Z) \equiv 1$ заменить неравенством $\mathbf{P}(s, x, t, Z) \leqslant 1$, то такая переходная функция будет соответствовать обрывающемуся марковскому процессу z_t. Выборочные функции такого процесса определены только до случайного «момента обрыва» ζ. Мы предположим, что $\zeta < c < \infty$.

Для обрывающегося процесса зададим событие L_0 так же, как во введении, а события L_1, L_2, K определим следующим образом:

$$L_1 = \bigcap_{\alpha} \left[L(a_\alpha, b_\alpha) \cap (M_{b_\alpha} \cup \{b_\alpha = \zeta\}) \right],$$

$$L_2 = \bigcap_{\alpha} \left[L(a_\alpha, b_\alpha) \cap (N_{a_\alpha} \cup \{a_\alpha = 0\}), \quad \cap (M_{b_\alpha} \cup \{b_\alpha = \zeta\}) \right],$$

$$K = \bigcap_{t \in (0,\, \zeta)} \left[\{\text{существует } \lim_{s \uparrow t} z_s\} \cup M_t \right] \cap \bigcap_{t \in (0,\, \zeta)} \left[\{\text{существует } \lim_{s \downarrow t} z_s\} \cup N_t \right].$$

Обозначим через $\mathscr{L}(U, V)$ условие, заключающееся в том, что

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{\zeta > t + h,\ z_t \in U,\ z_{t+h} \in V\}\, dt = o(h),\ h \to +0,$$

и через $\mathscr{L}(U, \varepsilon)$ — условие:

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{\zeta > t + h,\ z_t \in U,\ \rho(z_t, z_{t+h}) > \varepsilon\}\, dt = o(h),\ h \to +0.$$

Тогда теорема 3.1 останется верной и для обрывающегося процесса.

Теореме 3.2 соответствует следующая

Теорема 3.7. *Пусть z_t — обрывающийся марковский процесс, переходная функция которого удовлетворяет следующим условиям:*

1) *при каждом $x \in Z$ и $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{x,\, s,\, t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = o(1), \quad h \to +0, \tag{3.18}$$

где $x \in Z$; $s, t \in [0, c]$; $0 < t - s \leqslant h$,

2) *при некотором* $h > 0$

$$\inf_{x,\, s,\, t} \mathbf{P}(s, x, t, Z) > 0,$$

где $x \in X$; $s, t \in [0, c]$; $0 < t - s \leqslant h$.
Тогда выполнение условия $\mathcal{M}(Z)$ *необходимо и достаточно для того, чтобы* $\mathbf{P}(L(0, \zeta)) = 1$.

Используя метод доказательства теоремы V [3], можно из условия (3.18) вывести, что $\mathbf{P}(I) = 1$ и $\mathbf{M}\nu(Z, \varepsilon) < \infty$ при каждом $\varepsilon > 0$. Далее нужно применить метод доказательства теоремы 3.2.

Иногда полезно рассматривать необрывающийся процесс x_t, связанный с процессом z_t следующим образом. Пополним фазовое пространство Z фиктивной точкой $\varnothing$ и положим

$$x_t = \begin{cases} z_t, & \text{если } t < \zeta, \\ \varnothing, & \text{если } \zeta \leqslant t \leqslant c. \end{cases}$$

Процесс x_t в пространстве $X - Z \cup \varnothing$ является необрывающимся марковским процессом.

Теорема 3.6 остается верной для обрывающегося процесса z_t. Для доказательства следует применить теорему 3.6 к необрывающемуся процессу x_t построенному выше. Используя методы доказательства теорем 3.5 и 3.6 можно показать, что теорема 3.5 также верна для обрывающегося процесса.

Сформулируем теперь необходимое и достаточное условие, при котором обрывающийся процесс не может оборваться внутри системы $\mathfrak{A}$.

Теорема 3.8. *Пусть для системы* $\mathfrak{A}$ *имеет место равенство* $\mathbf{P}(K) = 1$. *Положим*

$$F = \{\zeta < c\} \cap \left(\bigcup_{U \in \mathfrak{A}} \{\lim_{t \uparrow \zeta} z_t \in U\} \right),$$

тогда для того, чтобы $\mathbf{P}(F) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $U \in \mathfrak{A}$ *выполнялось условие*

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{z_t \in U,\ \zeta \leqslant t + h\}\, dt = o(h),\ h \to +0. \tag{3.19}$$

Доказательство. Условие (3.19) можно переписать в виде

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in U,\ x_{t+h} = \varnothing\}\, dt = o(h),\ h \to +0, \tag{3.20}$$

где x_t — рассмотренный выше необрывающийся процесс.

Достаточность доказывается таким же методом, как теорема 1.1, с использованием процесса x_t и соотношения (3.20).

Необходимость. Пусть $U \in \mathfrak{A}$. Положим $y_t = x_{c-t}$ и $\eta = c - \zeta$, тогда имеем:

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{z_t \in U,\ \zeta \leqslant t + h\}\, dt = \int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t \in U,\ x_{t+h} = \varnothing\}\, dt =$$

$$= \mathbf{M} \int_0^{c-h} \chi_U(x_t)\, \chi_{\varnothing}(x_{t+h})\, dt = \mathbf{M} \int_{\max(\zeta - h,\, 0)}^{c-h} \chi_U(x_t)\, dt = \mathbf{M} \int_0^{\eta(h)} \chi_U(y_{t+h})\, dt. \tag{3.21}$$

Положим, далее,

$$A = \{\zeta < c,\ \limsup_{h \to +0} \chi_U(x_{\xi-h}) = 1\}.$$

В силу леммы 1.1

$$\limsup_{h \to +0} \mathbf{M} \int_0^{\eta(h)} \frac{\chi_U(y_{t+h})}{h}\, dt \leqslant \mathbf{P}\{\eta > 0, \limsup_{h \to +0} \chi_U(y_{\eta+h}) = 1\} = \mathbf{P}(A). \quad (3.22)$$

Теперь заметим, что $A \cap K \subseteq F$, а по условию теоремы $\mathbf{P}(K) = 1$ и $\mathbf{P}(F) = 0$, следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = 0. \quad (3.23)$$

Из (3.21)—(3.23) следует (3.19).

Автор приносит глубокую благодарность Евгению Борисовичу Дынкину за ценные замечания, сделанные при обсуждении рукописи настоящей работы.

Поступила в редакцию
26.3.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[2] Е. Б. Дынкин, Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв. АН СССР, сер. матем., **I**, (1952), 563—572.
[3] J. R. Kinney, Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. A. M. S., **74**, (1953), 280—302.
[4] D. Ray, Stationary Markov precesses with continuous paths, Trans. A. M. S., 82 (1956), 452—493.
[5] Р. Л. Добрушин, Условие непрерывности выборочных функций мартингала, Теория вероят. и ее примен. **III**, 1 (1958), 97—98.
[6] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория вероят. и ее примен. **I**, 1 (1956), 25—37.
[7] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероят. и ее примен. **I**, 1 (1956), 38—60.
[8] П. Халмош, Теория меры, М, ИЛ, 1953.

CONTINUITY CONDITIONS OF STOCHASTIC PROCESSES

L. V. SEREGIN (MOSCOW)

(*Summary*)

Let x_t, $0 \leqslant t \leqslant c < \infty$, be a separable stochastic process in metric space X. The main purpose of this paper is to derive conditions under which almost all sample functions of process x_t are continuous. We designate $\rho(x, y)$ the distance between the points $x, y \in X$.

Let $\mathbf{P}(\ldots)$ be a Markov transition function, satisfying for each $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x,s,t} \mathbf{P}(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = o(1), \quad h \downarrow 0,$$

where $x \in X$; $s, t \in [0, c]$, $0 < t - s \leqslant h$ and $V_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) \geqslant \varepsilon\}$. Then almost all sample functions of Markov process x_t are continuous if and only if for each $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{\rho(x_t, x_{t+h}) > \varepsilon\}\, dt = o(h), \quad h \downarrow 0.$$

Almost all sample functions of a martingale (semi-martingale) x_t are continuous if and only if for $h \downarrow 0$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t < a,\ x_{t+h} > b\}\, dt = o(h),$$

$$\int_0^{c-h} \mathbf{P}\{x_t > b,\ x_{t+h} < a\}\, dt = o(h)$$

for each a and b $(a < b)$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1961

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ С n ТИПАМИ ЧАСТИЦ

В. П. ЧИСТЯКОВ

Введение. Рассмотрим ветвящийся случайный процесс с n типами частиц $T_1, \ldots, T_n$ (см. [1]). Пусть за время $\Delta t\,(\Delta t \to 0)$ частица типа T_k может превратиться в ω_1 частиц типа $T_1, \ldots, \omega_n$ частиц типа T_n с вероятностью $\delta_k^\omega + p_k^\omega \Delta t + o(\Delta t)$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ и $\sum_\omega p_k^\omega = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$; при этом если $\omega_i = 0 \ (i \neq k)$ и $\omega_k = 1$, то $\delta_k^\omega = 1$ и $p_k^\omega < 0$, в остальных случаях $\delta_k^\omega = 0$ и $p_k^\omega < 0$. Обозначим $\mu_{kj}(t)$ количество частиц типа T_j в момент t, если в начальный момент имелась лишь одна частица типа T_k. Производящие функции $F_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ вероятностей перехода $P_k^\omega(t) = \mathbf{P}\{\mu_{kj}(t) = \omega_j, \ j = 1, \ldots, n\}$ связаны с производящими функциями $f_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\omega p_k^\omega x_1^{\omega_1} \ldots x_n^{\omega_n}$ $(k = 1, \ldots, n)$ системой уравнений (см. [1])

$$\frac{dF_k}{dt} = f_k(F_1, \ldots, F_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

удовлетворяют начальным условиям

$$F_k = (0, x_1, \ldots, x_n) = x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим факториальные моменты функций $f_k(\mathbf{x})$

$$a_{ij} = \left.\frac{df_i}{dx_j}\right|_{x=1}, \quad b_{ij}^{(k)} = \left.\frac{d^2 f_k}{dx_i dx_j}\right|_{x=1}, \quad c_{ijl}^{(k)} = \left.\frac{d^3 f_k}{dx_i dx_j dx_l}\right|_{x=1}.$$

Если матрица a с элементами a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ неразложима, то существует единственное простое характеристическое число λ с максимальной действительной частью, которому соответствует положительный собственный вектор $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ (этот факт является следствием теоремы Фробениуса [2], так как отрицательные элементы у матрицы a могут быть только на главной диагонали). Собственный вектор числа λ транспонированной матрицы обозначим $\mathbf{v}$. Будем считать, что $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ удовлетворяют условиям $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$.

Для процессов с неразложимой матрицей a функции условных распределений

$$S_k^{(t)}(\mathbf{y}) = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_{kj}(t)}{\mathbf{M}\{\mu_{kj}(t) \mid \mu_k(t) > 0\}} < y_j \quad j = 1, \ldots, n \,\middle|\, \mu_k(t) > 0\right\},$$

$$(\mu_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{kj}(t), \quad k = 1, \ldots, n)$$

при $t \to \infty$ слабо сходятся к некоторым предельным функциям распределения $S_k(\mathbf{y})$ (см. [3], [7], [4]).

При $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$ функции $S_k(\mathbf{y})$ существенно зависят от вида производящих функций $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$, причем в первом случае распределения дискретны, а во втором непрерывны и сосредоточены на прямой. При $\lambda = 0$ функции $S_k(\mathbf{y})$ являются показательными с характеристическими функциями $[1 - i(\tau_1 + \ldots + \tau_n)]^{-1}$. Поэтому ветвящийся процесс с $\lambda = 0$ разделяет два отличных по предельным распределениям типа процессов. В случае ветвящихся процессов с n типами частиц явления, возникающие при $\lambda \to 0$, естественно называть переходными.

В настоящей работе для процессов с n типами частиц получены при $t \to \infty$ и $\lambda \to 0$ предельные теоремы, аналогичные теоремам в [5], доказанным для процессов с одним типом частиц.

Автор благодарен Б. А. Севастьянову за постановку задачи и за все указания, полученные в ходе ее решения.

§ 1. Определение класса процессов

Будем рассматривать процессы из класса K, который определяется ограничениями, налагаемыми на матрицу a и на $b_{ij}^{(k)}$, $c_{ijl}^{(k)}$ $(i, j, k, l = 1, \ldots, n)$. Обозначим $\mathfrak{A}$ замкнутое компактное (в смысле сходимости по элементам) множество неразложимых квадратных матриц порядка n с неотрицательными элементами вне главной диагонали, которое содержит матрицы с λ близкими к 0.

Определение. *В класс* $\mathrm{K}\{\mathfrak{A}, \delta, B, c\}$ *входят процессы* $(\{f_k\} \in \mathrm{K})$, *для которых* $a \in \mathfrak{A}$, $0 < \delta < \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}^{(k)} < B < \infty$ *и* $c_{ijl}^{(k)} < c < \infty$ $(c \geqslant 0)$.

Заметим, что неразложимость матрицы a означает, что для любых T_i, T_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ частица типа T_i может с положительной вероятностью давать частицы типа T_j (по терминологии [1] типы образуют один класс типов), а из условия $\sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}^{(k)} > \delta > 0$ следует, что класс типов не будет финальной группой (см. [1]). Рассмотрим некоторые свойства матриц $a \in \mathfrak{A}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристические числа матрицы a и $\lambda = \lambda_1 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (\mathrm{Re}\,\lambda_k)$.

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{A}$ *— компактное множество неразложимых матриц с неотрицательными элементами вне главной диагонали, то*

1) *модули характеристических чисел матриц* $a \in \mathfrak{A}$ *равномерно ограничены;*

2) *существует постоянная* $\delta_1 > 0$ *такая, что* $u_k > \delta_1$, $v_k > \delta_1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *для любых* $a \in \mathfrak{A}$;

3) *существует постоянная* $\delta_2 > 0$ *такая, что* $\lambda - \operatorname{Re}\lambda_i > \delta_2$ $(i = 2, \ldots, n)$ *для любых* $a \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Из компактности $\mathfrak{A}$ вытекает ограниченность a_{ij} этому 1) есть следствие неравенства (1) [6] § 42, устанавливающего границы корней уравнения степени n. Утверждения 2) и 3) легко доказываются противного. Докажем, например, 2). Пусть постоянной $\delta_1 > 0$ не существует, тогда найдутся последовательности $\mathbf{u}^{(t)}$ и $\mathbf{v}^{(t)}$ такие, что некоторые координаты векторов $\mathbf{u} = \lim \mathbf{u}^{(t)}$ и $\mathbf{v} = \lim \mathbf{v}^{(t)}$ $(t \to \infty)$ равны нулю (из нормировки $\mathbf{u}^{(t)}$ и $\mathbf{v}^{(t)}$ следует, что все координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ не могут одновременно равняться нулю). Так как $\mathfrak{A}$ компактно, то можно выбрать подпоследовательность $\{t_l\}$ так, чтобы при $l \to \infty$ существовал $\lim a^{(t_l)} = a$ $(a \in \mathfrak{A})$. Все координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ матрицы a положительны. Это противоречие доказывает лемму.

§ 2. Теоремы для процессов, начинающихся с одной частицы

Найдем асимптотическую при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ формулу для функций $f_k(t, x_1, \ldots, x_n) = 1 - F_k(t, x)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Формула для вероятностей $q_k(t) = \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} \mu_{kj}(t) > 0\right\}$ выживания потомства частицы типа T_k будет частным случаем R_k, так как $Q_k(t) = R_k(t, 0, \ldots, 0)$. Разлагая правую часть (1) по формуле Тейлора, нетрудно убедиться, что $R_k(t, x)$ при $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(k, j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dR}{dt} = aR - \frac{1}{2}\varphi^{(2)}(R) + \frac{1}{6}\widetilde{\varphi}^{(3)}(R), \tag{2}$$

где R, $\varphi^{(2)}(R)$, $\widetilde{\varphi}^{(3)}(R)$ — векторы-столбцы с координатами

$$R_k(t, x), \quad \varphi_k^{(2)}(R) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(k)} R_i R_j, \quad \widetilde{\varphi}_k^{(3)}(R) = \sum_{i,j,l=1}^{n} \widetilde{c}_{ijl}^{(k)} R_i R_j R_l.$$

$(k = 1, \ldots, n)$ соответственно, причем $0 \leqslant \widetilde{c}_{ijl}^{(k)} \leqslant c_{ijl}^{(k)} < c$, так как коэффициенты $\widetilde{c}_{ijl}^{(k)}$ являются третьими производными функций $f_k(x)$ в точке $\widetilde{x}$ с координатами $0 < \widetilde{x}_j < R_j(t, x)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Если в (1) разложить правые частицы по формуле Тейлора только до членов второго порядка, то, вместо (2), получим

$$\frac{dR}{dt} = aR - \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}^{(2)}(R), \tag{3}$$

где, $\widetilde{\varphi}^{(2)}(R)$ — вектор с координатами $\widetilde{\varphi}_k^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}^{(k)} R_i R_j$, причем $0 \leqslant \widetilde{b}_{ij}^{(k)} \leqslant b_{ij}^{(k)} < B$. Линейным невырожденным преобразованием $r = \tau R$ приведем

систему (3) к виду

$$\frac{dr}{dt} = \Lambda r - \frac{1}{2}\widetilde{\psi}^{(2)}(r), \tag{4}$$

где $\Lambda = \pi a \pi^{-1}$, $r(t, x)$ — вектор с координатами $r_k(t, x) = \sum_{j=1}^{n} \pi_{kj} R_j(t, x)$, $\widetilde{\psi}^{(2)}(r_1, \ldots, r_n)$ — вектор с координатами $\widetilde{\psi}_k^{(2)}(r) = \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\beta}_{ij}^{(k)} r_i r_j$ и

$\widetilde{\beta}_{ij}^{(k)} = \sum_{p,q,l=1}^{n} \widetilde{b}_{pq}^{(l)} \pi_{kl} \pi'_{pi} \pi'_{qj}$ (π'_{pi} и π'_{qj} — коэффициенты преобразования π^{-1}).

Пусть π приводит матрицу a к жордановой форме. Система (4) запишется так:

$$\frac{dr_1}{dt} = \lambda r_1 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\beta}_{ij}^{(1)} r_i r_j$$

$$\frac{dr_{k_i}}{dt} = \lambda_{k_i} r_{k_i} + \gamma r_{k_i+1} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\beta}_{ij}^{(k_i)} r_i r_j \tag{5}$$

. . . . . .

$$\frac{dr_{k_i+l_i-2}}{dt} = \lambda_{k_i+l_i-2} r_{k_i+l_i-2} + \gamma r_{k_i+l_i-1} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\beta}_{ij}^{(k_i+l_i-2)} r_i r_j$$

$$\frac{dr_{k_i+l_i-1}}{dt} = \lambda_{k_i+l_i-1} r_{k_i+l_i-1} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{\beta}_{ij}^{(k_i+l_i-1)} r_i r_j,$$

где $k_2 = 2$; $k_{i+1} = k_i + l_i$ $(i = 2, \ldots, s)$; $\gamma > 0$ — некоторая постоянная, s — число клеток в матрице Λ; $\lambda_{k_i} = \lambda_{k_i+1} = \ldots = \lambda_{k_i+l_i-1}$.

Пусть характеристические числа λ_i занумерованы так, что для $\operatorname{Re}\lambda_i = -\alpha_i$ выполняются неравенства $\lambda_n = \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$. Не трудно проверить, что первая строчка матрицы Π и первый столбец матрицы Π^{-1} пропорциональны векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$. Преобразование Π зависит от матрицы a. Для каждой матрицы $a \in \mathfrak{A}$ преобразование Π, приводящее к жордановой форме, будем выбирать так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{n} |\pi_{kj}|^2 \leqslant 1 \quad (k = 2, \ldots, n),$$

$$\gamma \leqslant \delta_2/64, \quad \pi_{1i} = v_i K \quad \text{и} \quad \pi'_{i1} = u_i/K$$

($K > 0$ — произвольная постоянная). Коэффициенты π_{kj} в силу выбранной нормировки ограничены равномерно по $\mathfrak{A}$; π'_{kj} $(k \geqslant 1,\ j \geqslant 2)$ выражаются через π_{kj} по правилам вычисления элементов обратной матрицы.

Для доказательства ограниченности π'_{kj} $(k \geqslant 1,\ j \geqslant 2)$ достаточно показать, что определитель матрицы Π ограничен снизу положительной постоянной. Заметим, что коэффициенты π'_{kj} $(k \geqslant 1,\ j \geqslant 2)$ не зависят от величины K в преобразовании π. Обозначим d определитель матрицы Π при $K = 1$. Предположим, что существует последовательность матриц $a^{(t)} \in \mathfrak{A}$ такая, что при $t \to \infty$ $d^{(t)} \to 0$, $a^{(t)} \to a$. В $\Pi^{(t)}$ положим $K = 1/d^{(t)}$.

Из неразложимости матрицы α следует, что существует $\alpha_{i1} > 0$ с $i > 1$. з матричного равенства $\Pi^{(t)}\Lambda^{(t)} = a^{(t)}\Pi^{(t)}$ получим

$$a_{i1}^{(t)}\frac{v_j^{(t)}}{d^{(t)}} + \sum_{k=2}^{n} a_{ik}^{(t)}\pi_{kj}^{(t)} = \pi_{ij}^{(t)}l_{j-1\,j}^{(t)} + \pi_{ij}^{(t)}l_{jj}^{(t)},$$

е $l_{j-1,j}^{(t)}$ и $l_{jj}^{(t)}$ — элементы матрицы $\Lambda^{(t)}$. Это равенство невозможно, так ак при $t \to \infty$ $a_{i1}^{(t)} \to \alpha_{i1} > 0$, $d^{(t)} \to 0$, $v_j^{(t)} > \delta_1 > 0$, а остальные члены венства ограничены. Таким образом, определители матриц Π ограничены изу положительной постоянной, а π'_{kj} $(k \geqslant 1,\ j \geqslant 2)$ ограничены равно-ерно по $a \in \mathfrak{A}$.

Положим

$$g(\lambda, t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ t, & \text{если } \lambda = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$k(t, x, \lambda) = \frac{e^{\lambda t}\,[v_1(1 - x_1) + \ldots + v_n(1 - x_n)]}{1 + \dfrac{b}{2}\,g(\lambda, t)\,[v_1(1 - x_1) + \ldots + v_n(1 - x_n)]}, \tag{7}$$

де $b = \sum_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}^{(k)} v_k u_i u_j$. Имеет место следующая

Теорема 1. *При $t \to \infty$ и $\lambda \to 0$ имеет место асимптотическая формула*

$$R_j(t, x) = u_j k(t, x, \lambda)\,[1 + \eta_j(t, x, \lambda)],\quad j = 1, \ldots, n$$

де $\eta_j(t, x, \lambda) \to 0$ равномерно по всем $\{f_k\} \in \mathrm{K}$ и $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Доказательство теоремы 1 распадается на две части. Сначала окажем (см. ниже леммы 4 и 5), что $r_k(t, x)/r_1(t, x) \to 0$ при $k \neq 1$ и $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ равномерно по всем $\{f_k\} \in \mathrm{K}$, $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, n)$. тсюда будет следовать, что при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ $R_k(t, x) \sim u_k r_1(t, x)$.

Вторая часть доказательства (вывод асимптотической формулы для r_1 налогична доказательству теоремы 1 в [5], поэтому здесь мы ограничимся олько выводом новых оценок (леммы 6 и 7) и краткими указаниями отли-ий от [5].

С помощью лемм 2 и 3 установим сначала, что при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ ероятности $Q_k(t)$ стремятся к 0 равномерно по всем $\{f_k\} \in \mathrm{K}$.

Лемма 2. *Существует постоянная $b_0 > 0$ такая, что неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k b_{ij}^{(k)}\right) Q_i Q_j \geqslant b_0 \sum_{k=1}^{n} Q_k^2$$

ыполняется при всех t и всех $\{f_k\} \in \mathrm{K}$ с достаточно малыми λ.

Доказательство. Пусть такой постоянной b_0 не существует. этом случае можно найти последовательность $\{t^{(s)}, \lambda^{(s)}\}$ (вместе с $\lambda^{(s)}$ иксируется $\{f_k\}$) такую, что при $s \to \infty$

$$\lambda^{(s)} \to 0 \text{ и } \frac{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k b_{ij}^{(k)}\right) Q_i Q_j}{\sum_{k=1}^{n} Q_k^2} \to 0 \tag{8}$$

Так как $dQ_k/dt \leqslant 0$ и $c_{ijl}^{(k)} \geqslant 0$, то из уравнений

$$\frac{dQ_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} Q_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(k)} Q_i Q_j + \frac{1}{6} \sum_{i,j,l} c_{ijl}^{(k)} Q_i Q_j Q_l$$

следует, что

$$a_{k1} Q_1 + \ldots + a_{kn} Q_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(k)} Q_i Q_j \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Из $\{t^{(s)}, \lambda^{(s)}\}$ выберем такую подпоследовательность, чтобы при $s \to \infty$ для a_{kj} и $Q_i / \sum_k Q_k$ существовали пределы. Поделим правую и левую части (9) на $\sum_{k=1}^{n} Q_k$ и перейдем в полученных неравенствах к пределу. Учитывая, что

$$\frac{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{(k)} Q_i Q_j}{\sum_{k=1}^{n} Q_k} \leqslant \frac{1}{\delta_1} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k b_{ij}^{(k)} \right) Q_i Q_j}{\sum_{k=1}^{n} Q_k^2},$$

найдем

$$\alpha_{k_1} \chi_1 + \ldots + \alpha_{kn} \chi_n \leqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

где

$$\alpha_{ki} = \lim_{s \to \infty} a_{ki}, \quad \chi_i = \lim_{s \to \infty} \frac{Q_i(t^{(s)})}{\sum_{k=1}^{n} Q_k}.$$

Матрица $\| \alpha_{ij} \| \in \mathfrak{A}$. Умножая неравенства (10) на положительные компоненты собственного вектора матрицы, транспонированной по отношению к $\| \alpha_{ij} \|$, и складывая, убеждаемся, что сумма равна нулю. Отсюда следует, что

$$\alpha_{k1} \chi_1 + \ldots + \alpha_{kn} \chi_n = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

В силу равенства $\sum_{k=1}^{n} \chi_k = 1$, а также в силу (11) $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ является ненулевым собственным вектором матрицы $\| \alpha_{ij} \|$, соответствующим характеристическому числу 0. Таким образом, $\chi_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Поделим числитель и знаменатель (8) на $\left(\sum_{k=1}^{n} Q_k \right)^2$. По выбранной подпоследовательности выражение (8) не стремится к нулю, что противоречит исходным допущениям. Лемма доказана.

Лемма 3. *При $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ вероятности $Q_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ стремятся к нулю равномерно по всем $\{f_k\} \in K$.*

Доказательство. С помощью преобразования II ($K = 1$) из (2) для $(t) = r_1(t, 0) = v_1Q_1 + \ldots + v_nQ_n$ получим

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda Q - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_k \sum b_{ij}^{(k)} Q_i Q_j + \frac{1}{6}\widetilde{\psi}_1^{(3)}(r_1(t, 0), \ldots, r_n(t, 0)).$$

тсюда, учитывая ограниченность третьих моментов, с помощью леммы 2 и равенства $\sum_{k=1}^{n} Q_k^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} v_k Q_k\right)^2$ находим

$$\frac{dQ}{dt} < \lambda Q - \frac{b_0}{2}Q^2 + \frac{c_0}{6}Q^3,$$

де c_0 — некоторая постоянная. Из этого неравенства, повторяя дословно оказательства лемм 1 и 2 из [5] (заменив только λ на a и выбрав $\geqslant [4Q(0) - 2\varepsilon_0]/b_0\varepsilon_0^2$), получим, что $Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ равномерно по всем $\{f_k\} \in K$. Отсюда в силу неравенства $\sum_{k=1}^{n} Q_k < \frac{1}{\delta_1}Q$ и следует тверждение леммы 3.

Перейдем теперь к первой части доказательства теоремы 1. Из леммы 3 ытекает, что $r_k(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ равномерно по $\{f_n\} \in K$ и $\leqslant x_k \leqslant 1$, так как $|R_k(t, x)| \leqslant 2Q_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Положим

$$r^2 = \sum_{k=1}^{n} |r_k|^2, \quad \rho^2 = r^{-2}\sum_{k=2}^{n} |r_k|^2, \quad \rho_k^2 = |r_k|^2 r^{-2}.$$

Лемма 4. *Равномерно по всем* $\{f_k\} \in K$ *и* $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, *полняются неравенства*

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho^2}{dt} \leqslant -\left(\alpha_2 + \frac{r_t'}{r}\right)\rho^2 + \gamma\sigma + Cr, \tag{12}$$

$$\frac{r_t'}{r} \leqslant \lambda\rho_1 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \rho_k^2 + \gamma\sigma + Cr, \tag{13}$$

де $|\sigma| \leqslant 2\rho^2$ *и* $C > 0$ — *некоторая постоянная.*

Доказательство. Преобразуем (5), используя соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{d|r_{k_i}|^2}{dt} = \left(\overline{r}_{k_i}\frac{dr_{k_i}}{dt} + r_{k_i}\frac{d\overline{r}_{k_i}}{dt}\right)\frac{1}{2} = -\alpha_{k_i}|r_{k_i}|^2 + \gamma\frac{(\overline{r}_{k_i+1}r_{k_i} + r_{k_i+1}\overline{r}_{k_i})}{2} + O(|r_{k_i}|r^2)$$

десь $\overline{r}_{k_i}$ — функции, комплексно сопряженные с r_{k_i} (комплексными могут ыть коэффициенты преобразования II). Из преобразованной системы подста-

новкой $r^2\rho_k^2 = |r_k|^2$. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_1^2}{dt} = \lambda\rho_1^2 - \frac{r_t'}{r}\rho_1^2 + O(r),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_{k_i}^2}{dt} = -\left(\alpha_{k_i} + \frac{r_t'}{r}\right)\rho_{k_i} + \gamma\,\frac{r_{k_i}\bar{r}_{k_i+1} + \bar{r}_{k_i}r_{k_i+1}}{2} + O(r),$$

. . . . . (1

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_{k_i+l_i-2}^2}{dt} = -\left(\alpha_{k_i+l_i-2} + \frac{r_t'}{r}\right)\rho_{k_i+l_i-2}^2 + \gamma\,\frac{r_{k_i+l_i-2}\bar{r}_{k_i+l_i-1} + \bar{r}_{k_i+l_i-2}r_{k_i+l_i-1}}{2} + O(r$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_{k_i+l_i-1}^2}{dt} = -\left(\alpha_{k_i+l_i-1} + \frac{r_t'}{r}\right)\rho_{k_i+l_i-1}^2 + O(r).$$

Заменяя в $n-1$ последних уравнениях системы (14) α_i на α_2 и складыва получающиеся неравенства, получим (12). Неравенство $|\sigma| \leqslant 2\rho^2$ легко пр веряется. Если сложить все уравнения (14) и учесть, что $\sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 = 1$, то п лучим (13).

Лемма 5. *При $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ отношения $r_k(t, x)/r_1(t, x)$, $k \neq 1$, стр мятся к нулю равномерно по всем $\{f_k\} \in K$ и $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n$*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что существует постоянна α такая, что $\alpha_i < \alpha$ $(i = 2, \ldots, n)$ для любых $a \in \mathfrak{A}$. Если $2|\lambda| < \delta_2$, $2\alpha_i > \delta_2$ $(i = 2, \ldots, n)$. Из (13) находим

$$\left|\frac{r_t'}{r}\right| \leqslant \lambda + \alpha\rho^2 + 2\gamma\rho^2 + Cr.$$

Заменим в (12) σ на $2\rho^2$ и в полученном неравенстве оценим коэффициен при ρ^2:

$$-\alpha_2 - \frac{r_t'}{r} + 2\gamma \leqslant -\alpha_2 + |\lambda| + \alpha\rho^2 + 4\gamma + Cr. \qquad (1$$

Так как $|r_k(t, x)| \leqslant |\pi_{k_1}| R_1(t, x) + \ldots + |\pi_{kn}| R_n(t, x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} R_j(t, x)$ $\leqslant \frac{1}{\delta_1 K} r_1(t, x)$ и $\delta_1 K |r_k(t, x)| < r_1(t, x)$ для всех t, $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $\{f_k\} \in K$, постоянную K в преобразовании II можно выбрать так, чтобы $16\alpha\rho^2 < \delta$ Зафиксировав K, найдем такие t_0 и $\lambda_0 < \delta_2/16$, чтобы для $t > t_0$, $|\lambda| <$ выполнялось неравенство $Cr < \delta_2/16$ равномерно по $\{f_k\} \in K$. Учитывая, ч $64\gamma < \delta_2$, из (12) и (14) для любого процесса $\{f_k\} \in K$ с $|\lambda| < \lambda_0$ при $t >$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho^2}{dt} \leqslant -\frac{\delta_2}{4}\rho^2 + Cr.$$

Если при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ $\rho^2(t, x)$ не стремится к нулю равномерно $\{f_k\} \in K$ и $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то найдется $\varepsilon > 0$ и последовател

ость $\{t^{(m)}, \lambda^{(m)}, x^{(m)}\}$, такая, что при любом m $\rho^2(t^{(m)}, x^{(m)}) > \varepsilon$ и, кроме ого, $\lambda^{(m)} \to 0$ и $t^{(m)} \to \infty$ при $m \to \infty$. Выберем $t_1 > t_0$ и $\lambda_1 < \lambda_0$ так, что-ы выполнялось неравенство $2Cr < \varepsilon\delta_2/8$ при $t > t_1$ и $|\lambda| < \lambda_1$. Пусть m аково, что $t^{(m)} > t_1$, $|\lambda^{(m)}| < \lambda_1$ и $\exp\{-\delta_2(t^{(m)} - t_1)/4\} < \varepsilon/2$. При фикси-ованных $\lambda^{(m)}$ и $x^{(m)}$ определим множества

$$S_1 = \left\{t: -\frac{\delta_2}{4}\rho^2 + \frac{\varepsilon\delta_2}{8} \geqslant 0\right\} \cap [t_1, t^{(m)}],$$

$$S_2 = \left\{t: -\frac{\delta_2}{4}\rho^2 + \frac{\varepsilon\delta_2}{8} < 0\right\} \cap [t_1, t^{(m)}].$$

сли $t^{(m)} \in S_1$, то из определения S_1 следует, что $\rho^2(t^{(m)}, x^{(m)}) < \varepsilon/2$ и про-иворечие получено. Пусть $t^{(m)} \in S_2$. Из (15) вытекает, что на S_2 выпол-яется неравенство

$$\frac{d\rho^2}{dt} < -\frac{\delta_2}{4}\rho^2. \tag{16}$$

сли S_2 не совпадает с $[t_1, t^{(m)}]$, то существует $T = \sup_{t \in S_1} t$ (ясно, что $T \in S_1$) $\rho^2(T, x^{(m)}) < \varepsilon/2$. На отрезке $[T, t^{(m)}]$ ρ^2 убывает, следовательно, $(t^{(m)}, x^{(m)}) < \varepsilon/2$.

Пусть теперь $S_2 = [t_1, t^{(m)}]$. Интегрируя (16) по S_2 убеждаемся, что

$$\rho^2(t^{(m)}, x^{(m)}) \leqslant \rho^2(t_1, x^{(m)})\, e^{-\frac{\delta_2}{4}(t^{(m)} - t_1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ак как $\rho^2 \leqslant 1$. Сделанное вначале предположение привело к противоречию. оказано, что $\rho^2(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ равномерно по $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $= 1, \ldots, n)$ и по всем $\{f_k\} \in K$. Отсюда легко следует утверждение еммы.

Перейдем ко второй части доказательства теоремы 1. Положим

$$E_{ij}^{(1)}(t) = \partial^2 r_1 / \partial x_i \partial x_j \big|_{x=1}.$$

Лемма 6. *При любых t и $|\lambda| < \frac{\delta_2}{2}$ имеет место неравенство* $|E_{ij}^{(1)}(t)| \leqslant C_1[g(\lambda, t) + 1]$, *где C_1 — некоторая постоянная.*

Доказательство. Дифференцируя уравнение

$$\frac{dr_1}{dt} = \lambda r_1 - \frac{b}{2}r_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{i+j \neq 2} \beta_{ij}^{(1)} r_i r_j + \frac{1}{6}\widetilde{\psi}_1^{(3)}(r_1, \ldots, r_n)$$

о x_i и x_j в точке $x_1 = \ldots = x_n = 1$ и учитывая, что $\left.\frac{\partial^2 \widetilde{\psi}^{(3)}(r_1, \ldots, r_n)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=1} = 0$ олучим

$$\frac{dE_{ij}^{(1)}}{dt} = \lambda E_{ij}^{(1)} - bE_i^{(1)}E_j^{(1)} - \sum_{k+l \neq 2} \beta_{kl}^{(1)} E_i^{(k)} E_j^{(l)},$$

де $E_i^{(k)} = \partial r_k / \partial x_i|_{x=1}$. Отсюда для $g_{ij}(\lambda, t) = e^{-\lambda t} E_{ij}^{(1)}$ найдем

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \left[-bE_i^{(1)}E_j^{(1)} + \sum_{k+l\neq 2} E_i^{(k)}E_j^{(l)}\beta_{kl}^{(1)} \right] e^{-\lambda t}. \tag{17}$$

Из соотношения $-E_i^{(1)} = v_1 A_{1i} + \ldots + v_n A_{ni}$ и матричного равенства $\Pi A = \Lambda_1 \Pi$, где A матрица с элементами $A_{ij} = \mathbf{M}\mu_{ij}(t)$ и $\Lambda_1 = e^{\Lambda t}$ (Λ — жорданова форма матрицы a), следует, что

$$-E_i^{(1)} = e^{\lambda t} v_i \text{ и } E_i^{(k)}(t) = \omega_{ki}(t) \ (k \neq 1) \tag{18}$$

($\omega_{ki}(t)$ — линейная комбинация выражений вида $t^p e^{\lambda_q t}$ с $\operatorname{Re}\lambda_q < \lambda$), так как в левом верхнем углу матрицы Λ_1 стоит $e^{\lambda t}$, а остальные элементы первой строки и первого столбца нули.

Интегрируя (17) в пределах от 0 до t с учетом (18), получим

$$g_{ij}(\lambda, t) - g_{ij}(\lambda, 0) = g_{ij}(\lambda, t) = -bv_i v_j g(\lambda, t) + \omega(\lambda, t),$$

где $\omega(\lambda, t)$ — линейная комбинация выражений $t^p e^{(\lambda_i - \lambda)t}$, $t^p e^{\lambda_i t}$ и $[e^{(\lambda_k - \lambda)t} - 1]/(\lambda_k - \lambda)$. Эти выражения ограничены, так как $\lambda - \operatorname{Re}\lambda_k > \delta_2$ и $|\operatorname{Re}\lambda_i| > \delta_2/2$ ($i = 2, \ldots, n$). Согласно лемме 4 из [5] $g(\lambda, t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$. Следовательно, существуют $t^{(0)}$ и $\lambda^{(0)}$ такие, что $|g_{ij}(\lambda, t)| < Cg(\lambda, t)$ при $t > t^{(0)}$, $|\lambda| < \lambda^{(0)}$. Ясно, что C_1 можно выбрать так, чтобы утверждение леммы выполнялось.

Лемма 7. *Равномерно по всем* $\{f_k\} \in K$ *и* $1 - h \leqslant x_j \leqslant 1$ ($j = 1, \ldots, n$) *имеет место неравенство*

$$\frac{|r_1(t, x) - k(t, x, \lambda)|}{k(t, x, \lambda)} \leqslant \frac{hC_2[g(\lambda, t) + 1]}{\delta_1 - hC_2[g(\lambda, t) + 1]},$$

где функции $k(t, x, \lambda)$ *определена формулой* (7).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$\frac{dk}{dt} = \lambda k - \frac{b}{2} k^2 \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=1} = -v_i v_j e^{\lambda t} b[g(\lambda, t) - 1]. \tag{20}$$

Разложим $k(t, x, \lambda)$ и $r_1(t, x)$ по формуле Тейлора в точке $x_1 = \ldots = x_n = 1$:

$$k(t, \lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i) v_i e^{\lambda t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (1 - x_i)(1 - x_j) \widetilde{B}_{ij},$$

$$r_1(t, x) = \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i) v_i e^{\lambda t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (1 - x_i)(1 - x_j) \widetilde{B}_{ij},$$

где

$$|\widetilde{B}_{ij}| \leqslant \left|\frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=1} \text{ и } |\widetilde{B}_{ij}| \leqslant \left|\frac{\partial^2 r_1}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=}.$$

Используя эти разложения, найдем

$$\frac{|r_1 - k|}{k} \sim \frac{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1-x_i)(1-x_j)(|\widetilde{B}_{ij}|+|\widetilde{B}_{ij}|)}{e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)v_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1-x_i)(1-x_j)|\widetilde{B}_{ij}|},$$

ли, применяя (20) и лемму 6,

$$\frac{|r_1 - k|}{k} \leqslant \frac{\frac{h}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1-x_i)C_2'[g(\lambda, t)+1]}{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)v_i - \frac{h}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1-x_i)C_2'[g(\lambda, t)+1]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{hC_2[g(\lambda, t)+1]\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\delta_1\sum_{i=1}^{n}(1-x_i) - hC_2[g(\lambda, t)+1]\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}.$$

С помощью этого неравенства легко можно убедиться в справедливости утверждения леммы 7.

Покажем теперь, что

$$r_1(t, x) = k(t, \lambda, x)[1 + \eta(t, \lambda, x)], \tag{21}$$

где $k(t, \lambda, x)$ определена формулой (7) и $\eta(t, \lambda, x) \to 0$, равномерно по $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ и по всем $\{f_k\} \in K$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$.

Пусть постоянные C_4 и C_5 таковы, что

$$\Big|\sum_{i+j\neq 2}\beta_{ij}^{(1)}r_ir_j\Big| \leqslant C_4 r_1\sum_{i=2}^{n}|r_i| \quad \text{и} \quad |\widetilde{\psi}_1^{(3)}(r_1, \ldots, r_n)| < C_5 r_1^3.$$

При фиксированном x положим

$$S_1 = \left\{t : |\eta| k \leqslant r_1 \frac{4\left[\frac{1}{2}C_4\left(\frac{\sum_{i=2}^{n}|r_i|}{r_1}\right) + \frac{1}{6}C_5 r_1\right]}{\delta\delta_1^3}\right\},$$

$$S_2 = \left\{t : |\eta| k > r_1 \frac{4\left[\frac{1}{2}C_4\left(\frac{\sum_{i=2}^{n}|r_i|}{r_1}\right) + \frac{1}{6}C_5 r_1\right]}{\delta\delta_1^3}\right\}.$$

Из определения класса K и леммы 1 следует, что $b = \sum_{i,j,k} b_{ij}^{(k)} v_k u_i u_j \geqslant \delta\delta_1^3 > 0$.

В силу леммы 5 $\sum_{i=2}^{n}|r_i|/r_1 \to 0$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ равномерно по $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $\{f_k\} \in K$. Используя сделанные замечания, леммы 3 и 7 а также уравнение

$$\frac{dr_1}{dt} = \lambda r_1 - \frac{b}{2}r_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{i+j\neq 2}\beta_{ij}^{(1)}r_ir_j + \frac{1}{6}\widetilde{\psi}_1^{(3)}(r_1, \ldots, r_n),$$

полученное из (2) с помощью преобразования $\Pi(K=1)$ нетрудно доказать соотношение (21) так же как была доказана теорема 1 в [5].

Доказательство теоремы 1. Применяя преобразование Π^{-1}, найдем

$$R_j(t, x) = u_j r_1(t, x) + \pi'_{j2} r_2(t, x) + \ldots + \pi'_{jn} r_n(t, x) =$$

$$= u_j r_1(t, x)\left[1 + \frac{\sum_{i=2}^{n} \pi'_{ji} r_i(t, x)}{u_j r_1(t, x)}\right].$$

Отсюда с помощью леммы 5 и соотношения (21) следует утверждение теоремы 1.

Следствие. *Если* $t \to \infty$ *и* $\lambda \to 0$ (*или если* $\lambda = 0$), *то равномерно по* $\{f_k\} \in \mathrm{K}$

$$Q_j(t) \sim u_j k(t, \lambda, 0) \sim \begin{cases} \dfrac{2\lambda u_j e^{\lambda t}}{b(e^{\lambda t} - 1)}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ \dfrac{2u_j}{bt}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Пусть величина ξ имеет показательное распределение:

$$\mathbf{P}\{\xi < y\} = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{если } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

и пусть $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = \xi\} = 1$. Функцию совместного распределения величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ обозначим $S(y_1, \ldots, y_n)$, а функцию совместного распределения величин

$$Q_k(t)\,\mu_{kj}(t)\,e^{-\lambda t}/u_k v_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

при условии, что процесс не выродился ко времени t, обозначим

$$S_k(t, \lambda, y_1, \ldots, y_n).$$

Теорема 2. *При* $t \to \infty$, $\lambda \to 0$

$$\max_{y_1, \ldots, y_n} |S_k(t, \lambda, y_1, \ldots, y_n) - S(y_1, \ldots, y_n)| \to 0,$$

равномерно по всем $\{f_k\} \in \mathrm{K}$.

Доказательство. С помощью теоремы 1 нетрудно, проверить, что преобразования Лапласа

$$\varphi_k(t, \lambda, s) = \mathbf{M}\left\{\exp\left[-\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j \mu_{kj}(t)\, Q_k(t)}{u_k v_j \exp(\lambda t)}\right] \middle| \sum_{j=1}^{n} \mu_{kj} > 0\right\} \quad (s_1 = \ldots = s_n = 0)$$

для функций распределения $S_k(t, \lambda, y)$ при $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ стремятся к

$$\frac{1}{1 + s_1 + \ldots + s_n} \tag{22}$$

равномерно по всем $\{f_k\} \in \mathrm{K}$ и $0 \leqslant s_j \leqslant T$ $(j = 1, \ldots, n)$ при любом $T > 0$.

Для проверки (22) целесообразно воспользоваться равенствами:

$$\varphi_k(t, \lambda, s) = 1 - \frac{R_k(t, x_1, \ldots, x_n)}{Q_k(t)}, \text{ где } x_j = \exp\left[-\frac{s_j \mu_{kj} Q_k}{u_k v_j e^{\lambda t}}\right].$$

Если утверждение теоремы 2 не выполняется, то найдется $\varepsilon > 0$ и последовательность функций распределения $S_k(t^{(m)}, \lambda^{(m)}, y)$ (вместе с $\lambda^{(m)}$ фиксируется $\{f_k\} \in K$) такая, что

$$\max_y |S_k(t^{(m)}, \lambda^{(m)}, y) - S(y)| > \varepsilon > 0 \tag{23}$$

при любом m. Из (22) следует, что

$$\varphi_k(t^{(m)}, \lambda^{(m)}, s) \to \frac{1}{1 + s_1 + \ldots + s_n}.$$

Последнее соотношение равносильно слабой сходимости $S_k(t^{(m)}, \lambda^{(m)}, y)$ к $S(y)$ при $m \to \infty$. Так как $S(y)$ непрерывна, то при $m \to \infty$

$$\max_y |S_k(t^{(m)}, \lambda^{(m)}, y) - S(y)| \to 0.$$

Это противоречит (23). Теорема доказана.

Следствие. *Если* $t \to \infty$ *и* $\lambda \to 0$, *то*

$$\varphi_k(t, \lambda, -i\tau_1, \ldots, -i\tau_n) \to \frac{1}{1 - i(\tau_1 + \ldots + \tau_n)} \tag{24}$$

равномерно по всем $\{f_k\} \in K$ *и* $|\tau_j| < T$ $(j = 1, \ldots, n)$ *при любом фиксированном* T.

Следствие легко доказывается от противного: если (24) не выполняется, то существует последовательность функций распределения $S_k(t^{(m)}, \lambda^{(m)}, y)$, которая не сходится к $S_k(y)$, а это противоречит теореме 2.

Замечание. Предельная теорема 1 в [7] для процессов с $\lambda = 0$ является частным случаем доказанной теоремы.

§ 3. Предельные теоремы для процессов, начинающихся с большого числа частиц

Пусть исходное распределение частиц по типам в начале процесса задается вектором $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и пусть $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — распределение частиц по типам в момент времени t (если $t = 0$, то $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{m}$). Имеет место равенство

$$\boldsymbol{\nu} = \sum_{k=1}^{m_1} \boldsymbol{\mu}_1^{(k)} + \ldots + \sum_{k=1}^{m_n} \boldsymbol{\mu}_n^{(k)},$$

где $\boldsymbol{\mu}_i^{(k)}$ — вектор, задающий в момент времени t распределение по типам потомства k-й частицы типа T_i. Пусть ρ_j — количество ненулевых векторов

среди $\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)}, \ldots, \mu_j^{(m_j)}$. Нетрудно проверить, что при $t \to \infty$ и $\lambda \to 0$

$$\mathbf{P}\{\rho_j = 0\} = (1 - Q_j)^{m_j} \to e^{-\gamma_j},$$

$$\mathbf{M}\,\rho_j \sim \gamma_j = \frac{2m_j u_j e^{\lambda t}}{bg(\lambda, t)} \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\overline{M}_j^* = \frac{m_1 A_{1j} + \ldots + m_n A_{nj}}{P\{\nu > 0\}} \sim v_j (m_1 u_1 + \ldots + m_n u_n) \frac{e^{\lambda t}}{1 - e^{-\gamma}},$$

где

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n, \quad A_{kj}(t) = \mathbf{M}\,\mu_{kj}(t) \text{ и } \nu = \sum_{j=1}^{n} \nu_j.$$

Обозначим $H_1(z_1, \ldots, z_n)$ функцию совместного распределения величин $\nu_i/\overline{M}_j^*$ при условии, что $\nu > 0$, и пусть $\psi_1(t, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ — соответствующая характеристическая функция.

Теорема 3. *Если* $m_k \to \infty$, $\lambda \to 0$ *и* $t \to \infty$, *причем* $0 < \gamma_k < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$, *то равномерно для всех* $\{f_k\} \in \mathbf{K}$

$$\sup_z |H_1(z) - h_1(z, \gamma)| \to 0,$$

где функция распределения $h_1(z_1, \ldots, z_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *имеет характеристическую функцию*

$$\psi_1(\tau_1, \ldots, \tau_n; \gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \frac{1}{e^{\gamma} - 1}\left\{\exp\left[\frac{\gamma^2}{\gamma - i\tau(1 - e^{-\gamma})}\right] - 1\right\}$$

(*здесь* $\tau = \tau_1 + \ldots + \tau_n$, $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$).

Доказывается эта теорема так же, как теорема 3 в [5].

Замечание. Распределение, соответствующее функции $h_1(z, \gamma)$, сосредоточено на прямой $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$. Распределение на прямой задается формулой (35) [5].

Математическое ожидание для предельной функции распределения $h_1(\mathbf{z}, \gamma)$ равно 1 по каждой координате, а вторые центрированные моменты одинаковы и равны $\sigma^2 = (2/\gamma)(1 - e^{-\gamma}) - e^{-\gamma}$. Функция центрированного и нормированного предельного распределения имеет вид:

$$h(\mathbf{z}, \gamma) = h_1(z_1\sigma + 1, \ldots, z_n\sigma + 1; \gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Аналогичное преобразование функции распределения $H_1(z)$ задается формулой

$$H(z) = H_1(z_1\sigma^* + 1, \ldots, z_n\sigma^* + 1),$$

где

$$\sigma^{*2} = \frac{2 - (2 + w)e^{-w}}{w} \text{ и } w = \frac{2e^{\lambda t}}{bg(\lambda, t)} \sum_{j=1}^{n} m_j u_j.$$

Теорема 4. *Если* $m_k \to \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\lambda \to 0$ *и* $t \to \infty$, *то*

$$\sup_z |H(z) - h(z, \gamma)| \to 0$$

авномерно по всем $0 \leqslant \gamma \leqslant \infty$ *и* $\{f_k(x)\} \in K$.

Доказательство. Если теорема неверна, то найдется последовательность $\{t^{(k)}, \lambda^{(k)}, \gamma^{(k)}\}$ такая, что для соответствующих распределений неравенство

$$|H^{(k)}(z) - h^{(k)}(z, \gamma^{(k)})| > \varepsilon > 0 \tag{25}$$

ыполняется при любом k. Пусть при $\gamma^{(k_j)} \to \gamma$ $(j \to \infty)$. По лемме 7 [5]

$$h^{(k_j)}(z, \gamma^{(k_j)}) \to h(z, \gamma) \quad (j \to \infty)$$

авномерно по z. Отсюда и из (25) для достаточно больших j получим

$$|H^{(k_j)}(z) - h(z, \gamma)| > \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

В силу теоремы 1 эти неравенства невозможны.

Замечание. Если $\gamma_k \to 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, то распределение $h(z, \gamma)$ ходится к показательному, а если хотя бы одно $\gamma_k \to \infty$, то распределение (z, γ) сходится к нормальному.

Поступила в редакцию
18.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Севастьянов, Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, **VI**, 6 (1951), 47—99.
[2] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.
[3] М. Иржина, Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов, Чехословацкий матем. журнал, **7** (82), (1957), 130—153.
[4] T. E. Harris, Some mathematical models for branching processes, Proceedings of the second Berkeley symposium, 1951.
[5] Б. А. Севастьянов, Переходные явления в ветвящихся случайных процессах, Теория вероят. и ее примен., **VI**, 2 (1959), 121—135.
[6] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Гостехиздат, М., 1953.
[7] В. П. Чистяков, Две предельные теоремы для ветвящихся процессов с n типами частиц, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 477—478.

TRANSIENT PHENOMENA IN BRANCHING STOCHASTIC PROCESSES

V. P. ČISTYAKOV (MOSCOW)

(Summary)

Let $\mu_k(t) = \{\mu_{k1}(t), \ldots, \mu_{kn}(t)\}$ be a branching process with n types of particles nd let

$$\mathbf{P}\{\mu_{kj}(t) = \omega_j \;\; j = 1, \ldots, n\} = \delta_k^\omega + p_k^\omega t + o(t) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

when $t \to 0$. Here $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $\delta_k^\omega = 1$ for $\omega_k = 1$, $\omega_j = 0$ $(j \neq k)$ and $\delta_k^\omega = 0$ in other cases. We define the generating functions by $f_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum p_k^\omega x_1^{\omega_1} \ldots x_n^{\omega_n}$

$(k = 1, \ldots, n)$ and denote factorial moments by

$$a_{kj} = \left.\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right|_{x=1}, \quad b_{ij}^{(k)} = \left.\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=1}, \quad c_{ijl}^{(k)} = \left.\frac{\partial^3 f_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}\right|_{x=1}.$$

Let $\mathfrak{A}$ be the compact set of an undecomposable matrix $a = \| a_{kj} \| (k, j = 1, \ldots, n)$; $\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\operatorname{Re} \lambda_i)$ where the numbers λ_i satisfy the equality $|a - \lambda_i E| = 0$ (Ebeing the unity matrix) and $v = \{v_i\}_{i=1}^n$, $u = \{u_i\}_{i=1}^n$ satisfy the equalities $au = \lambda u$, $va = \lambda v$, $\sum_{k=1}^n v_k^2 = 1$, $\sum_{k=1}^n u_k v_k = 1$.

Let $K(\mathfrak{A}, \delta, B, c)$ be a class of $\{f_k(x)\}$ with $a \in \mathfrak{A}$, $0 < \delta < \sum_{i,j,k=1} b_{ij}^{(k)} < B < \infty$, $c_{i,j,l}^{(k)} < c < \infty$. The following asymptotic formula for $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ holds true uniformly for all $\{f_k\} \in K$

$$1 - \mathbf{P}\{\mu_{ij}(t) = 0, \ j = 1, \ldots, n \mid \mu_i > 0\} \sim u_i k(t, \lambda, 0)$$

where $k(t, \lambda, x)$ is given by (7), $\mu_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}(t)$.

The probability distributions

$$S_k^{(t)}(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_{kj}(t)}{\mathbf{M}\{\mu_{kj} \mid \mu_k > 0\}} < y_j \ j = 1, \ldots, n \,\middle|\, \mu_k > 0\right\}$$

converges to an exponential distribution as $t \to \infty$, $\lambda \to 0$ uniformly for all $\{f_k\} \in K$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1961

ОСТРОЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ СЛУЧАЙНОЙ ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ

В. А. ВОЛКОНСКИЙ

§ 1. Формулировка результатов

1. Преобразование непрерывного строго марковского процесса на прямой в процесс Винера. Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями аботы [1]. В работе [3] доказано, что с помощью монотонного преобразо-ания фазового пространства и случайной замены времени можно любой од-ородный строго марковский непрерывный процесс, регулярный на отрезке, вести к винеровскому процессу. Аналогичный метод случайной замены вре-ени в однородных одномерных процессах предложен в [2]. В этой заметке ы сформулируем теорему для неоднородных одномерных процессов.

Пусть $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные функции от t ($t \geqslant 0$, $a(t) < b(t)$) и $y_t(\omega)$ — епрерывный строго марковский процесс в полосе $[a(t),\ b(t)]$, $t \geqslant 0$. Пусть акже $T_0(\omega)$ и $T_1(\omega)$ — моменты первого достижения левой границы $a(t)$ и правой границы $b(t)$ соответственно, т. е. $T_0(\omega) = \sup\{t : y_t > a(t)\}$ и $T_1(\omega) = \sup\{t : y_1 < b(t)\}$, причем $T_0(\omega) = 0$ ($T_1(\omega) = 0$), если $y_0(\omega) = a(0)$ ($y_0(\omega) = b(0)$). Величины $T_0(\omega)$ и $T_1(\omega)$ могут принимать значение $+\infty$. Будем азывать y_t процессом с поглощением на границе, если $y_t(\omega) = a(t)$ при $> T_0(\omega)$ и $y_t(\omega) = b(t)$ при $t > T_1(\omega)$.

Введем следующее определение регулярности неоднородного процесса. обобщающее определение регулярности однородного процесса внутри отрезка см. [5]). *Процесс y_t называется регулярным внутри полосы $[a(t), b(t)]$, если*

1) $\mathbf{P}_{s,x}(T_0 < \infty) + \mathbf{P}_{s,x}(T_1 < \infty) = 1$,

2) $\mathbf{P}_{s,x}(T_0 < s + h) > 0$ и $\mathbf{P}_{s,x}(T_1 < s + h) > 0$

для любых x, $s \geqslant 0$, $h > 0$.

Преобразования процесса y_t к винеровскому, описывает следующая

Теорема 1. а) *Пусть y_t — непрерывный строго марковский процесс, регулярный в полосе $[a(t), b(t)]$, с поглощением на границах. Тогда функция $\varphi(t, x) = \mathbf{P}_{tx}(T_1 < \infty)$ строго возрастает по x при любом $t \geqslant 0$, и $z_t(\omega) = \varphi[t, y_t(\omega)]$ есть строго марковский процесс, регулярный в полосе $0,1]$ с поглощением на границах.*

б) *Пусть функция $\varphi(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов. Обозначим через $S_1(h, \omega)$ ($h > 0$) момент первой встречи траектории* $z_t(\omega)$*

* При наших предположениях z_t — непрерывный процесс.

с множеством точек $\left\{0,\ h,\ 2h,\ \ldots,\ \left[\frac{1}{h}\right]h,\ 1\right\}$ *(условимся называть это множество h-решеткой),* $S_2(h, \omega)$ *— момент первого после* S_1 *достижения одной из двух точек h-решетки, соседних с точкой* $z(S_1)$ *и т. д. Пусть* $m_h(t, \omega)$ *— целое число такое, что* $S_m(h, \omega) \leqslant t < S_{m+1}(h, \omega)$, *тогда для любого* $t \geqslant 0$ *и* $h \to 0$ *существует* $\lim h^2 m_h(t, \omega)$ *в смысле сходимости по вероятности* $\mathbf{P}_{0,x}$ *(при любых x). Обозначим этот предел* и пусть* $\sigma_t(\omega)$ *— верхняя грань тех s, для которых* $\tau_s(\omega) < t$. *Тогда при любом начальном распределении* y_t *процесс*

$$x_t = z(\sigma_t(\omega),\ \omega) = \varphi[\sigma_t,\ y(\sigma_t)] \qquad (1$$

эквивалент винеровскому процессу x_t' *(в смысле совпадения конечномерных распределений) на отрезке* $[0,1]$ *с поглощением на границах.*

Замечание. Предположение о непрерывности $\varphi(t, x)$ обеспечивает непрерывность $z_t = \varphi(t, y_t)$. Процесс z_t является строго марковским мартингалом и предположение о непрерывности $\varphi(t, x)$ может быть заменено любыми другими предположениями, обеспечивающими непрерывность z_t.

Следствие. Формула (1) допускает следующее обращение. Можно доказать, что при любом начальном распределении y_t отрезки постоянства неубывающей функции $\tau_t(\omega)$ с вероятностью 1 совпадают с отрезками постоянства функции $z_t(\omega)$. Отсюда следует, что почти наверное при всех t $z_t(\omega) = x(\tau_t(\omega),\ \omega)$.

Пусть $\psi(t, x)$ *— функция, обратная* $\varphi(t, x)$ *(как функция от x) при каждом* $t \geqslant 0$, *тогда*

$$y_t(\omega) = \psi[t,\ x(\tau_t)]. \qquad (2$$

Так как x_t эквивалентен винеровскому процессу, то (2) можно интерпретировать как формулу преобразования винеровского процесса в процесс y_t с помощью преобразования $\psi(t, y)$ фазового пространства $[0,1]$ и случайной замены времени $\tau_t(\omega)$. Следует заметить, что случайная величина $\tau_t(\omega)$ при фиксированном t не обязательно измерима относительно σ-алгебры, порожденной событиями $\{x_s(\omega) < x\}$, $s \geqslant 0$, как это было в случае однородного процесса y_t (см. [3]).

2. **Марковские процессы в других фазовых пространствах.** Относительно марковских процессов в других фазовых пространствах можно сформулировать следующую теорему, которая аналогична теореме работы [3] для случая однородных процессов и позволяет построить широкий класс неоднородных марковских процессов с помощью случайной замены времени. При этом мы воспользуемся определением марковского процесса, предполагающим наличие только одной вероятностной меры в пространстве элементарных событий, как это делается обычно в теории общих вероятностных процессов (см., например, [6]), а не целой системы мер $\mathbf{P}_{s,x}$, как это предполагается в работах [1] и [5] и п. 1 настоящей заметки.

Марковский процесс в измеримом фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ определяется так же, как в работе [1], за исключением того, что вместо систем

* Функция $\tau_t(\omega)$, очевидно, не убывает по t.

$\mathbf{P}_{s,x}$ имеется одна мера $\mathbf{P}$, определенная на σ-алгебре M^0 и удовлетворяющая условию (основное свойство марковского процесса): *для любых* $s \leqslant t$ *и* $\Gamma \in \mathfrak{B}$ *почти наверное,*

$$\mathbf{P}(x_t \in \Gamma \mid M_s) = \mathbf{P}(x_t \in \Gamma \mid x_s). \tag{3}$$

Таким образом, марковский процесс представляет собой систему (x_t, ζ, P). Это определение легко согласуется с определением строго марковского процесса, данным в работах [1] и [5]. Неотрицательную случайную величину τ называем не зависящей от будущего, если для любого $t \geqslant 0$ $\{\tau \leqslant t\} \in M_t$. Через M_τ обозначим совокупность событий A таких, что $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in M_t$ при любом $t \geqslant 0$, а через M^τ — σ-алгебру, порожденную событиями вида $\{x_{\tau+h} \in \Gamma\}$ $(h \geqslant 0,\ \Gamma \in \mathfrak{B})$. *Процесс* x_t *строго марковский, если для любой* τ, *зависящей от будущего, и любого* $A \in M^\tau$, *почти наверное,*

$$\mathbf{P}(A \mid M_\tau) = \mathbf{P}(A \mid x_\tau,\ \tau). \tag{4}$$

Строго марковский процесс x_t *называется однородным, если выполняются два условия* (ср. [1]):

1. *Для всех* $\omega \in \Omega$ *и* $h \geqslant 0$ *найдется* $\omega' \in \Omega$ *такое, что* $x_{t+h}(\omega) = x_t(\omega')$ *для любых* $t \geqslant 0$.

Элемент ω' определяется по ω, вообще говоря, не однозначно, однако, при $\xi(\omega)$ — M^0-измеримая функция, то как нетрудно показать, $\xi(\omega')$ — однозначная функция от ω; мы будем обозначать эту функцию $\xi(\omega)$. Условимся писать $B = \theta_t A$, если $\chi_B = \theta_t \chi_A$, где χ_A — индикатор множества A. Если $\tau(\omega)$ — произвольная неотрицательная случайная величина, функцию $\eta = \theta_\tau \xi$ определим равенством $\eta(\omega) = \theta_h \xi(\omega)$ на тех ω, где $\tau(\omega) = h$. Аналогично определяется множество $\theta_\tau A$.

2. *Для любой величины* $\tau(\omega)$, *не зависящей от будущего, и любого* $A \in M^0$, *с вероятностью* 1, $\mathbf{P}(\theta_\tau A \mid M_\tau) = \theta_\tau \mathbf{P}(A \mid x_0)$.

Заметим, что каждый марковский процесс строго марковский или однородный строго марковский, удовлетворяющий определению Е. Б. Дынкина [1] [5], после задания начального распределения превращается в соответствующий марковский процесс в нашем определении.

Пусть $X = (x_t, \zeta, N_{t+0}, \theta_t)$ — однородный непрерывный справа строго марковский процесс, причем N_t — σ-алгебра, порожденная событиями вида $\{x_s(\omega) \in \Gamma\}$, $s \leqslant t$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, и $N_{t+0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} N_{t+\varepsilon}$. Величина $\tau(\omega)$ не зависит от будущего процесса X, если при любом u $\{\tau \leqslant u\} \in N_{u+0}$. Пусть функция $\tau_t(\omega)$ возрастает и непрерывна справа по t при всех ω, причем для фиксированного t $\tau_t(\omega)$ — случайная величина, не зависящая от будущего процесса X. Пусть также $Y = (y_t(\omega), \bar{\zeta}(\omega), \bar{N}_{t+0}, \mathbf{P})$, где $y_t(\omega) = x(\tau_t(\omega), \omega)$, $\bar{\zeta}(\omega) = \sup\{s : \tau_s(\omega) < \zeta(\omega)\}$ и $\bar{N}_t$ — σ-алгебра, порожденная множествами $\{y_s(\omega) \in \Gamma\}$ $(s \leqslant t, \Gamma \in \mathfrak{B})$. В дальнейшем мы будем иногда обозначать процессы X и Y через x_t и y_t как в п. 1.

Теорема 2. а) *Если для любых* t *и* $h \geqslant 0$ *разность* $\tau_{t+h} - \tau_t$ N^{τ_t}*-измерима, то процесс* Y *марковский;*

б) *Если для любого* $h > 0$ *и любой случайной величины* φ, *не завися-*

щей от будущего процесса Y, разность $\tau_{\varphi+h} - \tau_\varphi$ N^{τ_φ}-измерима, то процесс Y строго марковский *.

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы.

Пример. Пусть $\varphi(x, t)$ $(t \geqslant 0,\ x \in E)$ — непрерывная положительная функция, x_t — однородный строго марковский непрерывный процесс, и пусть $\tau_t(\omega)$ верхняя интегральная кривая (см. [4] стр. 48) уравнения

$$\frac{d\tau_t}{dt} = \varphi[x(\tau_t, \omega), t], \quad \tau_0 = 0. \tag{}$$

Можно доказать, что функция $\tau_t(\omega)$ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы поэтому процесс $y_t = x(\tau_t)$ является строго марковским.

Пусть x_t — строго марковский процесс в n-мерном пространстве, удовлетворяющий определению работы [2] и имеющий инфинитезимальный оператор являющийся расширением оператора

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k a_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

и пусть $a_k(x)$ и $b_{ij}(x)$ непрерывны и ограничены (здесь всюду $x = (x_1, \ldots, x$ Положим

$$\sigma_{i\delta}(x) = \begin{cases} 0, & x_j \geqslant \delta, \\ x_j, & x_j < \delta, \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

и через $V_\delta(x)$ обозначим дополнение δ-окрестности точки x. Тогда, опираясь на результаты работы [5], можно доказать, что при $h \to 0$ для любых t $\delta > 0$, с вероятностью 1, будут выполняться соотношения:

$$\frac{1}{h}\mathbf{P}\{y_{t+h} \in V_\delta(y_t) \mid y_t\} \to 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{h}\mathbf{M}[\sigma_{k\delta}(y_{t+h} - y_t) \mid y_t] \to \varphi(y_t, t)a_k(y_t), \tag{6}$$

$$\frac{1}{h}\mathbf{M}[\sigma_{i\delta}(y_{t+h} - y_t)\sigma_{j\delta}(y_{t+h} - y_t) \mid y_t] \to \varphi(y_t, t)b_{ij}(y_t). \tag{6}$$

Таким образом, y_t — диффузионный процесс, локальные характеристики которого получаются из локальных характеристик $a_k(x)$ и $b_{ij}(x)$ процесса x_t умножением на функцию $\varphi(x, t)$.

§ 2. Доказательства

1. Доказательство теоремы 1. Нам понадобятся следующие леммы относительно регулярного процесса.

* Величина τ_φ не зависит от будущего процесса X. В аналогичной теореме 2 работы [3] допущена ошибка. Утверждение теоремы верно в предположении, что процесс $(x_t, \zeta, N_{t-0}, P_x, \theta_t)$ строго марковский, а функция τ_t строго возрастает по t. В работе [3] предполагается только, что $(x_t, \zeta, N_t, P_x, \theta_t)$ — строго марковский процесс и τ_t неубывающая функция.

Лемма 1. *Если $x_t(\omega)$ — регулярный процесс, то для любых $s \geqslant 0$ $\in (a(s),\ b(s))$, $h > 0$, $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}_{sx}\{T_1 < s+h,\ \min_{s<u<s+h} x_u(\omega) > x-\varepsilon\} > 0, \tag{7а}$$

$$\mathbf{P}_{sx}\{T_0 < s+h,\ \max_{s<u<s+h} x_u(\omega) < x+\varepsilon\} > 0. \tag{7б}$$

Доказательство. Докажем неравенство (7а) ((7б) доказывается аналогично). Рассмотрим два одинаковых, независимых друг от друга процесса $x_t(\omega)$ и $x'_t(\omega')$. Обозначим $s'_1(\omega)$ момент первого достижения процессом $x_t(\omega)$ точки $x-\varepsilon$ после момента s; через $s_1(\omega, \omega')$ — момент первой встречи (после момента $s'_1(\omega)$) двух частиц, движущихся по траекториям $x_t(\omega)$ и $x'_t(\omega')$; через $s'_2(\omega,\omega')$ — момент первого после $s_1(\omega, \omega')$ достижения $x-\varepsilon$; через $s_2(\omega, \omega')$ — момент, первый после $s'_2(\omega, \omega')$, встречи частиц ω и ω' и т. д. Легко проверить, что величины $s_k(\omega, \omega')$ при фиксированном ω не зависят от будущего процесса $x'_t(\omega')$, а при фиксированном ω' не зависят от будущего процесса $x_t(\omega)$. Положим $s_0 = s$. В этих обозначениях для любых s, $x > 0$, x и $\varepsilon > 0$.

$$\mathbf{P}_{s,x}\{T_1(\omega) < s+h\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} \mathbf{P}_{s_n,\ x(s_n)}\{T_1(\omega) < s+h,\ \min_{s_n<u<s+h} x_u(\omega) > x-\varepsilon\}\, \mathbf{P}_{s,x}(d\omega), \tag{8}$$

где

$$A_n = \{\omega : s_n(\omega,\ \omega') < s+h,\quad a(s_n) < x(s_n) < b(s_n)\}.$$

Так как $s_n(\omega, \omega')$ при фиксированном ω' не зависит от поведения строго марковского процесса $x_t(\omega)$ в будущем, то члены ряда (8) представляют собой вероятности

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A_n,\ T_1(\omega) < s+h,\ \min_{s_n<u<s+h} x_u(\omega) > x-\varepsilon\}. \tag{9}$$

Обозначим

$$B = \left\{\omega' : \max_{s<u<s+h} |\, x'_u(\omega') - x\,| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

выберем такое $h > 0$, чтобы было $\mathbf{P}_{s,x}(B) > 0$, тогда

$$\mathbf{P}_{s,x}(B)\,\mathbf{P}_{s,x}\{T_1(\omega) < s+h\} = \int_B \mathbf{P}_{s,x}\{T_1(\omega) < s+h\}\,\mathbf{P}_{s,x}(d\omega') > 0. \tag{10}$$

Если бы (7а) не выполнялось, то (9) обращалась бы в нуль, что противоречит неравенству (10) (последнее станет очевидным, если (8) представить в (10) и сменить порядок суммирования и интегрирования).

Лемма 2. *Функция $\varphi(s, x) = \mathbf{P}_{s,x}\{T_1 < \infty\}$ строго возрастает по x при любом t.*

Доказательство*. Как и при доказательстве леммы 1, рассмотрим два одинаковых независимых процесса $x_t(\omega)$ и $x'_t(\omega')$. Обозначим

* Идея доказательства принадлежит Р. Л. Добрушину.

через $T(\omega, \omega')$ момент первой встречи двух частиц, движущихся по траекто риям $x_t(\omega)$ и $x'_t(\omega')$ (после момента s), и через $T_{01}(\omega)$ ($T_{01}(\omega')$) — момент пер вого выхода процесса $x_t(\omega)$ ($x'_t(\omega')$) из полосы $[a(t), b(t)]$, т. е. $T_{01}(\omega) = \min(T_0(\omega), T_1(\omega))$. Для $x < y$ имеем

$$\mathbf{P}_{s,y}\{T_1(\omega') < \infty\} - \mathbf{P}_{s,x}\{T_1(\omega) < \infty\} =$$

$$= \int_{T_1(\omega)}^{\infty} \mathbf{P}_{s,x}\{x_u(\omega) < x'_u(\omega'),\ u \geqslant s\}\, \mathbf{P}_{s,y}(d\omega') > 0,$$

так как произведение

$$\mathbf{P}_{s,y}\left\{\max_{s<u<s+h} |\, x'_u(\omega') - y\,| < \frac{y-x}{2}\right\} \mathbf{P}_{s,x}\left\{T_0(\omega) < s+h,\ \max_{s<u<s+h} x_u(\omega) < \frac{x+y}{2}\right.$$

не превосходит эту разность, и согласно лемме 1 это произведение положи тельно.

Из леммы 2 и условия теоремы 1 вытекает, что $z_t = \varphi(t, y_t)$ — непрерыв ный, строго марковский процесс. Обозначим $T_x(\omega, t)$ момент первого (посл момента t) достижения процессом z_t уровня x (если траектория $z_t(\omega)$ не пе ресекает уровень x, то $T_x(\omega, t) = \infty$). Кроме того, положим

$$p_{t,x}(u, v) = \mathbf{P}_{t,x}\{T_u(\omega, t) < T_v(\omega, t)\}.$$

Лемма 3. *Если* $0 \leqslant u \leqslant x \leqslant v \leqslant 1$, *то*

$$p_{t,x}(v, u) = \frac{x-u}{v-u}. \tag{11}$$

Доказательство. Из определения функций $\varphi(t, x)$ и $p_{t,x}(u, v)$ вытекает что $p_{t,x}(1, 0) = x$. Отсюда, учитывая, что z_t — непрерывный строго марковски процесс, получаем $x = v p_{t,x}(v, 0)$. Так как $p_{t,x}(1,0) + p_{t,x}(0,1) = 1$, то $p_{t,x}(u, 1) = (1-x)/(1-u)$. Далее имеем

$$1 - \frac{x}{v} = 1 - p_{t,x}(v, 0) = p_{t,x}(0, v) = \int_{T_u < T_v} p_{T_u,\, u}(0, v)\, \mathbf{P}_{t,x}(d\omega) =$$

$$= \left(1 - \frac{u}{v}\right) p_{t,x}(u, v),$$

поэтому

$$p_{t,x}(u, v) = \frac{x-v}{u-v} \quad \text{и} \quad p_{t,x}(v, u) = \frac{x-u}{v-u}.$$

Для доказательства второй части теоремы 1 нам понадобится следую щая

Лемма 4. *Пусть* x_t — *винеровский процесс на отрезке* $[0,1]$ *с поглоще нием на границе. Тогда существует последовательность* $H = \{h_1, h_2, \ldots\}$, $h_k \downarrow 0$, *такая, что для любого* x

$$\mathbf{P}_x\{\lim_{h \to 0,\ h \in H} h^2 m_h(\infty, \omega) = T_{01}(\omega)\} = 1. \tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что, если x_t — ви неровский процесс на всей прямой и величины $S_h(h, \omega)$ и $m_h(t,$

ределяются, исходя из h-решетки $\{..., -h, 0, h, 2h, ...\}$, то существует следовательность H, для которой

$$\mathbf{P}_x\{\lim_{h\to 0,\ h\in H} h^2 m_h(t,\omega) = t,\ t \geqslant 0\} = 1.$$

Докажем это утверждение. Величина $S_k(h, \omega)$ является суммой $k-1$ инаково распределенных слагаемых с математическим ожиданием h^2 и величины $S_1(h, \omega)$, которая сходится, по вероятности $\mathbf{P}_x$, к нулю при $h \to 0$. огласно закону больших чисел $S_{t/h^2}(h, \omega) \to t$ при $h \to 0$, по вероятности $\mathbf{P}_x$. тсюда для любого $t \geqslant 0$ при $h \to 0$.

$$\mathbf{P}_x\{|h^2 m_h(t,\omega) - t| \geqslant \varepsilon\} = \mathbf{P}_x\{S_{\left[\frac{t+\varepsilon}{h^2}\right]} \leqslant S_{m_h} \leqslant S_{\left[\frac{t-\varepsilon}{h^2}\right]-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}_x\{S_{\left[\frac{t+\varepsilon}{h^2}\right]} \leqslant t\} + \mathbf{P}_x\{S_{\left[\frac{t-\varepsilon}{h^2}\right]} \geqslant t\} \to 0.$$

Последнее соотношение выполняется равномерно по x, поэтому мы можем ыбрать такую последовательность H_1, чтобы для всех x имело место ра-енство

$$\mathbf{P}_x\{\lim_{h\to 0,\ h\in H_1} h^2 m_h(t,\omega)\} = 1.$$

Далее, берем подпоследовательность $H_2 \cap H_1$ такую, чтобы для некоторого четного всюду плотного множества C значений t на полупрямой $[0, \infty)$ и ля всех x

$$\mathbf{P}_x\{\lim_{h\to 0,\ h\in H_2} h^2 m_h(t,\omega) = t,\ t \in C\} = 1.$$

Так как при каждом ω $m_h(t, \omega)$ не убывает по t, то (12) выполняется при $= H_2$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Найдется последовательность H_1 такая, что для процесса при $h \to 0$ $(h \in H_1)$ и любых t, x, с $\mathbf{P}_{ax}$-вероятностью* 1, *существует* m $h^2 m_h(t, \omega)$.

Доказательство. Пусть $t > s \geqslant 0$. Построим функцию, аналогичную $_h(t, \omega)$, считая началом отсчета времени не 0, а момент s. Обозначим эту ункцию $n_h(s, t, \omega)$; очевидно, $m_h(t, \omega) = n_h(0, t, \omega)$. Из леммы 3 следует, то при любых $u < x < v$ для процесса z_t и для винеровского процесса на трезке $[0, 1]$ с поглощением на концах вероятности попадания из точки x в очку v раньше, чем в u, одинаковы. Поэтому для любых $h \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, s, x $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{|h^2 n_h(s, \infty, \omega) - l^2 n_l(s, \infty, \omega)| > \varepsilon\}$$

овпадает с аналогичной вероятностью для винеровского процесса и, вследствие (12), стремится к нулю при $\min(h, l) \to 0$, если $h, l \in H$. Отсюда легко вывести (тем же приемом, как при доказательстве леммы 4), что найдется последовательность $H_1 \subset H$ такая, что при $h \to 0$ $(h \in H_1)$, с $\mathbf{P}_{s,x}$-вероятностью 1, для любых s и x существует $\lim h^2 n_h(s, \infty, \omega)$, так как для $t \geqslant 0$ $_h(\infty, \omega) = m_h(t, \omega) + n_h(t, \infty, \omega)$, то при $h \to 0$ $(h \in H_1)$, с $\mathbf{P}_{0x}$-вероятностью , существует $\lim h^2 m_h(t, \omega)$. Лемма доказана.

Обозначим:

$$\tau_t(\omega) = \lim_{h\to 0,\ h\in H_1} h^2 m_h(t, \omega). \qquad (13$$

Можно доказать, что величины $h^2 m_h(t, \omega)$ сходятся к $\tau_t(\omega)$, по $\mathbf{P}_{0x}$-вероятности, для любого x и при любом стремлении h к нулю (мы не будем проводить это доказательство). Можно доказать также, что процесс $z(\sigma_t)$ непрерывен по t, с $\mathbf{P}_{0x}$-вероятностью 1 (величины $\sigma_t(\omega)$ определены в формулировке теоремы 1).

Чтобы убедиться в эквивалентности $z(\sigma_t)$ винеровскому процессу (в смысле совпадения конечномерных распределений), нам, очевидно, достаточно доказать следующую лемму. Пусть $\overline{M}_t$ — σ-алгебра, порожденная множествами

$$\{z(\sigma_s) < x\},\ s \leqslant t,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Лемма 6. *При любом начальном распределении и любых $s < t$, почти неверное,*

$$\mathbf{P}\{z(\sigma_t) < x \mid \overline{M}_s\} = \mathbf{P}_{z(\sigma s)}\{x'_{t-s} < x\}, \qquad (14$$

где $x'_t(\omega)$ — винеровский процесс на отрезке $[0,1]$ с поглощением на концах, а $\mathbf{P}_y\{x'_t < x\}$ — его переходная вероятность.

Доказательство. Заметим, что $\sigma_t(\omega)$ при фиксированном t не зависит от будущего процесса z_t, так как для любого $u > 0$, $\{\sigma_t(\omega) < u\} = \{\tau_u(\omega) > t\} \in M_u$. Можно доказать, что $\overline{M}_t \subset M_{\sigma_t}$ (мы не будем проводить это доказательство: оно легко вытекает из доказательства теоремы 1 работы [3]). Таким образом, вместо (14), нам достаточно доказать равенство

$$\mathbf{P}\{z(\sigma_t) < x \mid M_{\sigma_s}\} = \mathbf{P}_{z(\sigma_s)}\{x'_{t-s} < x\}.$$

Пусть $U_1(s, x, \varepsilon)$ — момент первого (после s) достижения множества $\{y\colon y \geqslant x - \varepsilon\}$ процессом $z(\sigma_t)$; $U_2(s, x, \varepsilon)$ — момент первого (после U_1) достижения точки $x - \varepsilon$; $U_3(s, x, \varepsilon)$ — момент первого (после U_2) достижения точки $x + \varepsilon$ и т. д. Через $U'_1, U'_2, \ldots$ обозначим соответствующие величины для процесса x'_t. Кроме того, положим $U_0 = U'_0 = s$. Тогда для $t > s$, с вероятностью 1, при любом начальном распределении имеем:

$$\mathbf{P}\{z(\sigma_t) < x \mid M_{\sigma_s}\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{U_{2n} \leqslant t, U_{2n+1} > t \mid M_{\sigma_s}\}.$$

Из определения функций $\tau_t(\omega)$ и $\sigma_t(\omega)$ следует, что величины U_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) M^{σ}-измеримы. Поэтому для любого y, с $\mathbf{P}_{0,y}$-вероятностью 1,

$$\mathbf{P}\{z(\sigma_t) < x \mid M_{\sigma_s}\} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{\sigma_s,\, z(\sigma_s)}\{U_{2n} \leqslant t,\ U_{2n+1} > t\}. \qquad (15$$

Кроме того, легко убедиться, что для любых n, s, x, ε, с $\mathbf{P}_{0,y}$-вероятностью 1,

$$\mathbf{P}_{\sigma_s,\, z(\sigma_s)}\{U_{2n}(s, x, \varepsilon) \leqslant t,\ U_{2n+1} > t\} =$$

$$= \mathbf{P}_{z(\sigma_s)}\{U'_{2n}(0, x, \varepsilon) \leqslant t,\quad U'_{2n+1} > t\}. \qquad (16$$

винеровского процесса x'_t при любых t и $y \in [0, 1)$

$$\mathbf{P}_y\{x'_t < x\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_y\{U'_{2n}(0, x, \varepsilon) \leqslant t,\ U'_{2n+1}(0, x, \varepsilon) > t\}. \qquad (17)$$

соотношений (15), (16) и (17) вытекает, что, с вероятностью 1,

$$\mathbf{P}\{z(\sigma_t) < x \mid M_{\sigma_s}\} \leqslant \mathbf{P}_{z(\sigma_s)}\{x'_t < x\}.$$

логичным способом можно убедиться в справедливости обратного нера-ства (со включением). Этим завершается доказательство леммы и теоре-1.

2. **Пример (продолжение).** Докажем утверждения, высказанные в приме-(§ 1). Сначала убедимся, что процесс $x(\tau_t)$ строго марковский. Для это-мы должны доказать, что для любых постоянных t, u, $h > 0$ и $\varphi(\omega)$, зависящей от будущего процесса $x(\tau_t)$,

1) $\{\tau_t(\omega) < u\} \in M_u$,

2) разность $\tau_{\varphi+h} - \tau_\varphi$ измерима относительно $M^{\tau}{}_{\varphi}$.

Легко доказывается

Лемма 7. *Если функции $y^{(k)}(t)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) + \frac{1}{k}, \quad y(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$f(y, t)$ непрерывна по совокупности аргументов, то $y(t) = \lim_{k\to\infty} y^{(k)}(t)$ ь верхняя интегральная кривая уравнения $dy/dt = f(y, t)$, $y(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \varphi[x(y, \omega), t] + \frac{1}{k}, \quad y(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (18)$$

верждение 1) будет доказано, если мы построим такие решения $\tau_t^{(k)}(\omega)$ внений (18), что при любых t, u и k $\{\tau_t^{(k)}(\omega) < u\} \in M_u$.

Возьмем последовательность разбиений Δ_n отрезка $[0, t]$ с максимальной ной интервала разбиения, стремящейся к нулю. Пусть разбиение Δ_n зада-я точками $0 = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k_n} = t$, и пусть $y_n(t, \omega)$ — ломаная Эйлера уравнения (18) при некотором фиксированном k, соответствующая этому биению. Убедимся индукцией по j, что величины $y_n(t_j, \omega)$ не зависят от ущего. Обозначим $y_{n,j} = y_n(t_j, \omega)$, и пусть $y_{n,j-1}$ не зависит от будуще-тогда

$$y_{n,j} = y_{n,j-1} + C_j(\omega)(t_j - t_{j-1}), \text{ где } C_j(\omega) = \varphi[x(y_{n,j-1}, \omega), t_{j-1}] + \frac{1}{k}.$$

этого равенства видно, что $y_{n,j}$ измеримы относительно $M_{y_{n,j-1}}$ и, сле-ательно,

$$\{y_{n,j} < u\} = \{y_{n,j} < u\}\{y_{n,j-1} < u\} \in M_u.$$

лее, при $n \to \infty$ $\limsup y_n(t, \omega)$ для каждого ω является интегральной вой уравнения (18), поэтому мы можем в качестве $\tau_t^{(k)}$ выбрать этот верх-

ний предел, тогда

$$\{\tau_t^{(k)}(\omega) < u\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \left\{ \limsup_{n\to\infty} y_n(t, \omega) < u - \frac{1}{l} \right\}.$$

Так как все слагаемые принадлежат M_u, то их сумма также принадлеж M_u. Утверждение 1) доказано. Аналогично доказывается и утверждение с тем лишь исключением, что интегральные кривые и ломаные Эйлера д уравнения (18) нужно строить при начальном условии $y(0, \omega) = \tau_{\varphi(\omega)}($

Доказательство соотношений (6 а, б, в) не представляет трудностей.

Поступила в редакцию
5.10.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, М., Физматгиз, 19
[2] П. Леви, Замечания о процессе В. Феллера и Х. П. Мак-Кина, C. R. Acad. Sci., 2 21 (1957), 1772—1774.
[3] В. А. Волконский, Случайная замена времени в строго марковских процесс Теория вероят. и ее примен., III, 3 (1958), 332—350.
[4] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных урав ний. М., ГИТТЛ, 1952.
[5] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теор вероят. и ее примен., I, 1 (1956), 38—60.
[6] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М.. ИЛ 1956.

CONSTRUCTION OF INHOMOGENEOUS MARKOV PROCESSES BY MEANS OF A RANDOM TIME SUBSTITUTION

V. A. VOLKONSKY (MOSCOW)

(*Summary*)

It is proved that a continuous single-dimensional Markov process $y(t)$ with v restrictions can be obtained from the Wiener process $x(t)$ in the following form: $y(t$ $= \psi[x(\tau_t), t]$, where $\psi(x, t)$ is a continuous function, monotonic in x for a given t, τ_t is a nondecreasing random function of t (theorem 1).

Conditions are given which should be met by the Markov process $x(t)$ in abst space and the random function τ_t so that the process $y(t) = x(\tau_t)$ will also be a Ma process (theorem 2).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1961

НОВАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ГАУССОВСКИМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Е. Г. ГЛАДЫШЕВ

1. В недавней работе Бэкстера [1] была доказана следующая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями *:

Пусть $\xi(t)\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ *— действительный случайный процесс с гауссовскими приращениями, имеющий среднее значение* $m(t)$ *и корреляционную функцию* $r(t, s)$. *Если функция* $m(t)$ *имеет ограниченную первую производную при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *а функция* $r(t, s)$ *непрерывна при* $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ *и имеет равномерно ограниченные вторые производные при* $t \neq s$, *то всегда существуют равномерные пределы*

$$D^+(t) = \lim_{s \to t+} \frac{r(t, t) - r(t, s)}{t - s},$$

$$D^-(t) = \lim_{s \to t-} \frac{r(t, t) - r(t, s)}{t - s},$$

и с вероятностью 1 *выполняется соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right)^2 = \int_0^1 g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = D^-(t) - D^+(t).$$

Используя метод Бэкстера, Козин [2] получил предельную теорему для процессов со стационарными независимыми приращениями.

Предельная теорема Бэкстера [1] нашла важные применения к задаче о выделении радиосигнала на фоне шума (см. работу Слепяна [3]). Из результатов Слепяна, в частности, следует, что если два действительных случайных стационарных гауссовских процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют рациональные относительно λ спектральные плотности $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ такие, что $\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \neq 1$, то отвечающие этим процессам вероятностные меры в функциональном пространстве реализаций сингулярны друг относительно друга **.

---

* В работе [1] основаная теорема формулируется для гауссовского случайного процесса; однако при ее доказательстве используется лишь нормальность приращений процесса.

** Интересно отметить, что вероятностные меры в функциональном пространстве реализаций для любых двух случайных гауссовских процессов всегда или взаимно абсолютно непрерывны или взаимно сингулярны (см. [6], [7] и [8]).

Естественно предположить, что этот результат будет верен также и для широкого класса гауссовских стационарных процессов, спектральные плотности которых не являются рациональными; однако, если исходить только из теоремы Бэкстера, то нельзя надеяться на сколько-нибудь значительное расширение класса рассматриваемых процессов. Но оказывается, что для гауссовских случайных процессов можно доказать и другую предельную теорему, естественно обобщающую теорему Бэкстера и позволяющую существенно усилить основной результат Слепяна.

Основной результат работы может быть сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — *действительный случайный процесс с гауссовскими приращениями такой, что*

1. *существует* $\mathbf{M}\xi(t)$ и $\left|\frac{d\mathbf{M}\xi(t)}{dt}\right| < L_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. *существует корреляционная функция* $r(t, s) = \mathbf{M}\{[\xi(t) - \mathbf{M}\xi(t)][\xi(s) - \mathbf{M}\xi(s)]\}$ процесса $\xi(t)$, *обладающая следующими свойствами*:

а) $r(t, s)$ *непрерывна при* $0 \leqslant t, s \leqslant 1$,

б) *при* $t \neq s$ *существует* $\frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s}$ *и* $\left|\frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s}\right| < \frac{L_2}{|t-s|^\gamma}$, $0 < \gamma < 2$,

в) *выражение*

$$\frac{r(t, t) - 2r(t, t-h) + r(t-h, t-h)}{h^{2-\gamma}}$$

при $h \to 0$ *равномерно на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *стремится к некоторой функции* $g(t)$.

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n(1-\gamma)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 = \int_0^1 g(t)\, dt. \tag{1}$$

Очевидно, что при $\gamma = 1$ эта теорема включает в себя теорему Бэкстера.

Замечание к теореме 1. Если в условиях б) и в) показатель γ удовлетворяет неравенствам $0 < \gamma < 1$, то эти условия могут быть заменены следующим одним условием: функция

$$f(t, s) = |t - s|^\gamma \frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s},$$

определенная при $t \neq s$, непрерывна в квадрате $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ (т. е. при $t = s$ эта функция имеет лишь устранимый разрыв). При этом $g(t) \equiv \frac{2f(t, t)}{(2-\gamma)(1-\gamma)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Для доказательства этого замечания рассмотрим в области $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ плоскости (t, s) квадрат K_h с вершинами в точках

$$(t_0, t_0),\ (t_0, t_0 - h),\ (t_0 - h, t_0),\ (t_0 - h, t_0 - h).$$

усть $\max_{0\leqslant t,\, s\leqslant 1} |t-s|^{\gamma} \cdot \left|\frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t\, \partial s}\right| \leqslant L$. Тогда при $t \neq s$ справедливо неравенства

$$\left|\frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t\, \partial s}\right| \leqslant \frac{L}{|t-s|^{\gamma}}. \tag{2}$$

з [2] видно, что если $0 < \gamma < 1$, то функция $\frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t \partial s}$ будет интегрируема квадрате K_h, причем

$$\int_{K_h} \frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t \partial s}\, dt\, ds = r(t_0, t_0) + r(t_0 - h, t_0 - h) - r(t_0, t_0 - h) - r(t_0 - h, t_0) =$$

$$= r(t_0, t_0) + r(t_0 - h, t_0 - h) - 2r(t_0, t_0 - h). \tag{3}$$

иксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $h = h(\varepsilon)$ так, чтобы в квадрате K_h было выполнено неравенство

$$f(t_0, t_0) - \varepsilon \leqslant f(t, s) \leqslant f(t_0, t_0) + \varepsilon, \quad (t, s) \in K_h.$$

Из последнего неравенства при $t \neq s$ получаем

$$\frac{f(t_0, t_0) - \varepsilon}{|t-s|^{\gamma}} \leqslant \frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t\, \partial s} \leqslant \frac{f(t_0, t_0) + \varepsilon}{|t-s|^{\gamma}}. \tag{4}$$

нтегрируя все члены неравенств (4) по квадрату K_h, будем иметь

$$\frac{2[f(t_0, t_0) - \varepsilon]}{(2-\gamma)(1-\gamma)} \leqslant \frac{r(t_0, t_0) - 2r(t_0, t_0 - h) + r(t_0 - h, t_0 - h)}{h^{2-\gamma}} \leqslant \frac{2[f(t_0, t_0) + \varepsilon]}{(2-\gamma)(1-\gamma)}.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ находим, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(t_0, t_0) - 2r(t_0, t_0 - h) + r(t_0 - h, t_0 - h)}{h^{2-\gamma}} = \frac{2f(t_0, t_0)}{(2-\gamma)(1-\gamma)},$$

го и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Достаточно рассмотреть лишь случай, когда $M\xi(z) \equiv 0$ (см. [1]).

Удобно ввести следующие обозначения.

$$\Delta\xi_k = \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right), \qquad k = 1, \ldots, 2^n.$$

$$d_{jk} = 2^{n(1-\gamma)} \cdot \mathbf{M}\{\Delta\xi_j\, \Delta\xi_k\}, \qquad j, k = 1, \ldots, 2^n.$$

$$\tau_{1n} = 2^{n(1-\gamma)} \sum_{k=1}^{2^n} [\Delta\xi_k]^2.$$

$$d_n = 2 \cdot \sum_{k=1}^{2^n} d_{kk}^2 + 4 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j>k}}^{2^n} d_{jk}^2.$$

Легко проверяются равенства

$$\mathbf{M}\eta_n = \sum_{k=1}^{2^n} d_{kk}.$$

$$\mathbf{M}\eta_n^2 = \sum_{k=1}^{2^n} 3\,d_{kk}^2 + 2 \sum_{\substack{j,\ k=1 \\ j>k}}^{2^n} (d_{kk}\,d_{jj} + 2\,d_{jk}^2), \tag{5}$$

так что

$$\mathbf{D}\eta_n = \mathbf{M}\eta_n^2 - (\mathbf{M}\eta_n)^2 = d_n.$$

Значит, в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}\{\,|\,\eta_n - \mathbf{M}\eta_n\,|\,> 2^{\frac{n(\delta-1)}{2}}\} < 2^{n(1-\delta)} \cdot d_n. \tag{6}$$

Число δ мы выбираем таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \delta < 1, \quad 1 - 2\gamma < \delta. \tag{7}$$

Если мы покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\delta)}\,d_n < \infty \tag{8}$$

и

$$\mathbf{M}\eta_n \to \int_0^1 g(t)\,dt \text{ при } n \to \infty,$$

то из неравенства (6) и леммы Бореля—Кантелли сразу будет следовать утверждение теоремы 1.

По определению

$$d_{jk} = \left[r\left(\frac{k}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) + r\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{j-1}{2^n}\right) - r\left(\frac{k}{2^n}, \frac{j-1}{2^n}\right) - r\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right] \cdot 2^{n(1-\gamma)} \tag{9}$$

Из условия в) теоремы 1 и равенств (5) и (9) непосредственно следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\eta_n = \int_0^1 g(t)\,dt,$$

причем $g(t)$ — непрерывная функция.

Для того чтобы доказать (8), оценим сверху величину $2^{n(1-\delta)}\,d_n$. Имеем

$$2^{n(1-\delta)}\,d_n = 2 \cdot 2^{n(1-\delta)} \sum_{k=1}^{2^n} d_{kk}^2 + 4 \cdot 2^{n(1-\delta)} \sum_{\substack{j,\ k=1 \\ j>k}}^{2^n} d_{jk}^2. \tag{10}$$

Рассмотрим на координатной плоскости (t, s) область $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$. Проинтегрируем функцию $\frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t\,\partial s}$ по квадрату K, имеющему вершины в точ

... (t, s), $(t-h, s)$, $(t, s-h)$, $(t-h, s-h)$, считая, что квадрат K нахо-...ся в области $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ и не касается диагонали $s = t$. Тогда получим

$$\int_K \frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s}\, dt\, ds = r(t, s) + r(t-h, s-h) - r(t-h, s) - r(t, s-h). \qquad (11)$$

...другой стороны, при $t \neq s$ по условию теоремы

$$\left| \frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s} \right| < \frac{L_2}{|t-s|^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2.$$

...едовательно,

$$\left| \int_K \frac{\partial^2 r(t, r)}{\partial t\, \partial s}\, dt\, ds \right| \leqslant \int_K \frac{L_2\, dt\, ds}{|t-s|^\gamma}. \qquad (12)$$

...к как

$$\int_K \frac{L_2\, dt\, ds}{|t-s|^\gamma} \leqslant L_2 \cdot h^2 \cdot \max_{(t, s) \in K} \frac{1}{|t-s|^\gamma}, \qquad (13)$$

в силу (9), (11) и (13)

$$|d_{jk}| < \frac{L_2}{2^n (j-k-1)^\gamma} \text{ при } j \geqslant k+2. \qquad (14)$$

...сталось еще оценить $|d_{jk}|$ при $j = k+1$ и при $j = k$. Поступим так. ...и $j = k+1$ квадрат K, вершинами которого являются точки

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right), \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right), \left(\frac{k}{2^n}, \frac{j-1}{2^n}\right), \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{j-1}{2^n}\right),$$

...сается диагонали $s = t$. Чтобы применить предыдущие оценки, сдвинем ...адрат, не меняя его размера, на малую величину ε параллельно одной из ...ей t или s так, чтобы он не имел общих точек с диагональю и оставал-...в области $0 \leqslant t, s \leqslant 1$. Полученный квадрат обозначим K_ε. Тогда в силу ...словия а) теоремы 1

$$d_{k+1,\, k} = 2^{n(1-\gamma)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s}\, dt\, ds. \qquad (15)$$

...о легко проверить, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varepsilon} \frac{L_2\, dt\, ds}{|t-s|^\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{L_2 (2^{2-\gamma} - 2) \cdot 2^{(\gamma-2)n}}{(2-\gamma)(1-\gamma)} & \text{при } \gamma \neq 1 \\ 2 \ln 2 \cdot L_2 \cdot 2^n & \text{при } \gamma = 1 \end{array} \right\} = O\left(2^{-n(2-\gamma)}\right). \qquad (16)$$

...з (15) и (16) следует, что

$$d_{k+1,\, k} = O\left\{\left(\frac{1}{2^n}\right)\right\}. \qquad (17)$$

...го же касается членов d_{kk}, то в силу условия в) теоремы 1

$$d_{kk} = O\left\{\left(\frac{1}{2^n}\right)\right\}. \qquad (18)$$

...сли принять во внимание, что

$$\sum_{j,\, k-1 \geqslant k+2}^{2^n} \frac{1}{(j-k-1)^{2\gamma}} \sum_{t=1}^{2^n-2} \frac{2^n - 2 - t}{t^{2\gamma}} <$$

$$< 2^n \cdot \sum_{t=1}^{2^n-2} \frac{1}{t^{2\gamma}} < 2^n \left(1 + \int_1^{2^n} \frac{dt}{t^{2\gamma}}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{2n(1-\gamma)} & \text{при } \gamma \neq \frac{1}{2}, \\ 2^n (1+n) & \text{при } \gamma = \frac{1}{2}, \end{array} \right. \qquad (19)$$

то из (10), (14), (17), (18) и (19) легко находим, что

$$\sum 2^{n(1-\delta)} d_n < \infty$$

Теорема 1 доказана. Из теоремы 1 весьма просто выводится

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 $\int_0^1 g(t)\,dt \neq 0$, *то с вероятностью* 1

$$\lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{1}{n}\log_2 \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2\right\} = \gamma.$$

Доказательство. В самом деле, в условиях теоремы 2, очевидно, $\int_0^1 g(t)\,dt > 0$, и, следовательно, мы можем прологарифмировать обе стороны равенства (1) и до перехода к пределу по $n \to \infty$ разделить результат на n.

§2. Применим теперь теоремы 1 и 2 к частному случаю процессов со стационарными гауссовскими приращениями. Для таких процессов справедливо спектральное разложение вида

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it\lambda} - 1)\,dz(\lambda),$$

где $z(\lambda)$ — случайный процесс с независимыми приращениями. Если при этом

$$M\{|dz(\lambda)|^2\} = f(\lambda)\,d\lambda,$$

то мы будем говорить, что процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda)$.

Теорема 3. *Пусть* $\xi(t)$ — *действительный случайный процесс со стационарными гауссовскими приращениями и средним* 0, *имеющий спектральную плотность* $f(\lambda)$ *такую, что*

$$\frac{f(\lambda)}{|\lambda|^{-\alpha}} = c + O(\lambda^{-2}) \quad \textit{при больших } \lambda;\ c > 0,\ 1 < \alpha < 3. \tag{20}$$

Тогда с вероятностью 1 *выполняются соотношения*:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{2 - \frac{1}{n}\log_2 \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2\right\} = \alpha$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \left\{-\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\Gamma(\alpha)\,2^{n(\alpha-2)-1} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2\right\} = c,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — *гамма-функция Эйлера*.

Замечание к теореме 3. В условиях теоремы 3 мы считаем, что процесс $\xi(t)$ задан на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 1$. При помощи изменения начала отсчета и единицы измерения времени можно показать, что *поведение спектральной плотности* $f(\lambda)$ *процесса* $\xi(t)$ *на бесконечности* (*т. е. значения параметров* c *и* α) *определяется с вероятностью* 1 *по известной одной реализации процесса на произвольном* (*сколько угодно малом*) *отрезке оси* t.

Доказательство теоремы 3. Покажем сначала, что в условиях теоремы 3 случайный процесс $\xi(t) - \xi(0)$ удовлетворяет условиям теорем 1 и

показателем $\gamma = 3 - \alpha$. Для этого воспользуемся тем, что корреляционную функцию $r(t, s) = \mathbf{M}(\xi(t) - \xi(0))(\xi(s) - \xi(0))$ случайного процесса $\xi(t) - \xi(0)$ можно выразить через структурную функцию $B(t-s) = \mathbf{M}(\xi(t) - \xi(s))^2$. А именно (см. [5]),

$$r(t, s) = \frac{1}{2}\left\{B(t) + B(s) - B(t-s)\right\}. \tag{21}$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |\, e^{i\tau\lambda} - 1\,|^2 f(\lambda)\, d\lambda = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\tau\lambda}{2}\, f(\lambda)\, d\lambda. \tag{22}$$

Проверяем условие б) теоремы 1. Из (21) и (22) находим, что

$$\frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t\, \partial s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t-s)}{\partial t\, \partial s} = 2\frac{d^2}{d\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{\tau\lambda}{2}\cdot f(\lambda)\, d\lambda\Big|_{\tau = t-s}.$$

Покажем, что существует

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\tau\lambda}{2}\cdot f(\lambda)\cdot d\lambda,$$

причем

$$\left|\frac{d^2}{d\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\tau\lambda}{2}\cdot f(\lambda)\cdot d\lambda\,\right|\Big|_{\tau = t-s} < \frac{\text{const}}{|\,t-s\,|^{3-\alpha}}.$$

Для этого разобьем интеграл

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\tau\lambda}{2}\cdot f(\lambda)\cdot d\lambda$$

на сумму следующих двух интегралов:

$$I(\tau) = I_1(\tau) + I_2(\tau),$$

где

$$I_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\tau\lambda}{2}\,[f(\lambda) - c\,|\,\lambda\,|^{-\alpha}]d\lambda \tag{23}$$

$$I_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{\tau\lambda}{2}\cdot c\,|\,\lambda\,|^{-\alpha}\, d\lambda = c_1\cdot|\,\tau\,|^{\alpha-1}.$$

В силу (20) интеграл I_1 можно два раза дифференцировать по параметру τ под знаком интеграла, при этом

$$\left|\frac{d^2}{d\tau^2} I_1(\tau)\right| < \text{const}. \tag{24}$$

Очевидно, при $\tau \neq 0$

$$\left|\frac{d^2}{d\tau^2} I_2(\tau)\right| = \frac{\text{const}}{|\,\tau\,|^{3-\alpha}}$$

Следовательно, условие б) теоремы 1 удовлетворено. Ясно, что условие а) теормы 1 также выполнено

Проверим теперь условие в), учитывая, что $\gamma = 3 - \alpha$. Будем иметь

$$\frac{r(t, t) - 2r(t, t-h) + r(t-h, t-h)}{h^{\alpha-1}} - 4 \cdot h^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{h\lambda}{2} \cdot f(\lambda)\, d\lambda.$$

Разбиваем интеграл $I(h) = 4 \cdot h^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{h\lambda}{2} \cdot f(\lambda) \cdot d\lambda$ на сумму двух интегралов: $I(h) = I'(h) + I''(h)$,

$$I'(h) = 4 \cdot h^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{h\lambda}{2} \cdot [f(\lambda) - c\,|\lambda|^{-\alpha}]\, d\lambda,$$

$$I''(h) = 4 \cdot h^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{h\lambda}{2} \cdot c \cdot |\lambda|^{-\alpha} \cdot d\lambda = -\frac{2c}{\cos \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \Gamma(\alpha)}.$$

Из (23) и (24) следует, что $I'(h) = O(h^{3-\alpha})$ при малых h.

Теперь легко видеть, что условие в) теоремы 1 выполнено и при этом

$$g(t) - \frac{2c}{\cos \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \Gamma(\alpha)} \neq 0$$

(функция $g(t)$ определена в условиях теоремы 1).

Полагая в теоремах 1 и 2

$$g(t) \equiv -\frac{2c}{\cos \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \Gamma(\alpha)}$$

и

$$\gamma = 3 - \alpha,$$

получаем утверждение теоремы 3.

Теорема 4. *Если в условиях теоремы 3 показатель α равен 3, то с вероятностью 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{n \ln 2} \sum_{k=1}^{3^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 = c.$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 1 и 3 и мы его опускаем. Аналогично, но с менее громоздкими выкладками доказывается

Теорема 5. *Если в условиях теоремы 3 показатель α удовлетворяет неравенству $\alpha > 3$, то с вероятностью 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^{3^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 = 0.$$

Накопленные нами факты позволяют без труда доказать следующее предложение.

Теорема 6. *Если два действительных случайных процесса со стационарными гауссовскими приращениями и нулевым средним имеют спектральные плотности* $f_1(\lambda)$ *и* $f_2(\lambda)$ *такие, что*

$$\frac{f_k(\lambda)}{|\lambda|^{-\alpha_k}} = c_k + O(\lambda^{-2}),\ k = 1,\ 2,\ c_1 \cdot c_2 \neq 0,$$

ле α_1 *и* α_2 *— действительные числа и*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \neq 1, \tag{25}$$

ве вероятностные меры в функциональном пространстве реализаций, соответствующие этим двум процессам, сингулярны друг относительно руга.

Доказательство. Легко заметить, что условие (25) эквивалентно тому, что $(c_1, \alpha_1) \neq (c_2, \alpha_2)$. Кроме того, имеют место неравенства $\alpha_1 > 1$ $\alpha_2 > 1$. Эти неравенства означают, что спектральные плотности $f_1(\lambda)$ и (λ) интегрируемы на бесконечности. Дифференцируя одинаковое число раз а процесса (если это нужно) можно добиться того, что для соответствующих производных процессов будут выполняться все условия теоремы 6 при этом будет иметь место хоть одно из следующих двух неравенств $< \alpha_1 \leqslant 3$ или $1 < \alpha_2 \leqslant 3$.

После этого из теорем 3, 4 и 5 уже совсем просто выводится справедливость утверждения теоремы 6.

3. Рассмотрим в заключение специальный класс процессов со стационарными приращениями, детально изученный А. Н. Колмогоровым в работе [4]. Процессы этого класса играют существенную роль в ряде задач статистической теории турбулентности (ср. [9]).

Пусть $\xi_t^{(c,\delta)}\ (-\infty < t < \infty)$ *— действительный случайный процесс с гауссовскими приращениями, для которого*

$$\mathbf{M}\{\xi_t - \xi_s\} = 0$$

$$\mathbf{M}(\xi_{t+\tau} - \xi_t)^2 = c\,|\tau|^\delta,\ c > 0,\ 0 < \delta < 2.$$

Легко показать, что этот процесс есть процесс со стационарными приращениями, удовлетворяющий условиям теоремы 3. Спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $\xi_t^{(c,\delta)}$, фигурирующая в условиях теоремы 3, в данном случае равна м., например, [5])

$$f(\lambda) = 2^{-1} \cdot c \cdot \Gamma(\delta + 1) \cdot \sin\frac{\pi\delta}{2} \cdot |\lambda|^{-\delta-1}.$$

Применив к этому процессу теорему 3, немедленно получаем следующее утверждение:

1. *С вероятностью* 1

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \log_2 \sum_{k=1}^{2^n} \left[\xi^{(c,\delta)}_{k/2^n} - \xi^{(c,\delta)}_{(k-1)/2^n} \right]^2 \right\} = \delta.$$

2. *С вероятностью* 1

$$\lim_{n \to \infty} 2^{n(\delta-1)} \sum_{k=1}^{2^n} \left[\xi^{(c,\delta)}_{k/2^n} - \xi^{(c,\delta)}_{(k-1)/2^n} \right]^2 = c.$$

Из сказанного для данного примера вытекают два следствия.

Следствие 1. *Параметры c и δ процесса $\xi_t^{(c,\delta)}$ с вероятностью* 1 *определяются по сколь угодно малому отрезку реализации процесса* ($c \neq 0$; $0 < \delta < 2$).

Следствие 2. *Рассмотрим два процесса* $\xi_t^{(c_1,\delta_1)}$ *и* $\xi_t^{(c_2,\delta_2)}$ ($c_1 c_2 \neq 0$; $0 < \delta_1, \delta_2 < 2$).

Если $(c_1, \delta_1) \neq (c_1, \delta_2)$, *то вероятностные меры в пространстве элементарных событий, отвечающие этим двум процессам, сингулярны друг относительно друга.*

Автор выражает благодарность А. М. Яглому за руководство работой.

Поступила в редакцию
26.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Baxter, A strong limit theorem for gaussian processes, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 522—525.
[2] F. Kozin, A limit theorem for processes with stationary independent increments, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 960—963.
[3] D. Slepian, Some comments on the detection of gaussian signals in gaussian noise, IRE Trans. on Inform. Theory, vol. JT-4, December, N 2, 1958.
[4] А. Н. Колмогоров, Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве, ДАН СССР, **26** (1940), 115—118.
[5] А. М. Яглом, Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями, Матем. сборник, **37**, 1 (1955), 141—196.
[6] J. Hàjek, A property of J-devergences of marginal probability distributions, Czechoslov. Math. J., 8 (1957), 460—463.
[7] Я. Гаек, Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса, Чехословацкий матем. ж., 8 (1957), 610—617.
[8] J. Feldman, Equivalence and perpendicularity of gaussian processes, Pacif. Math. 8 (1958), 699—708.
[9] А. М. Обухов, А. М. Яглом, Микроструктура развитой турбулентности, Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 3, Москва, 1956, 542—557.
[10] А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, **7**, 5 (1952), 3—168.

A NEW LIMIT THEOREM FOR STOCHASTIC PROCESSES WITH GAUSSIAN INCREMENTS

E. G. GLADYSHEV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

We prove a limit theorem which generalizes Baxters's limit theorem [1]. This theorem in essence makes it possible to extend the class of stochastic processes to which Slepian's main result is applicable [3].

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ИЗ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1961
ом VI Выпуск 1

УТОЧНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

С. В. НАГАЕВ

Введение. Формулировка результатов

Теоремы, уточняющие сходимость к нормальному закону в случае однородных цепей Маркова с конечным числом состояний были впервые получены С. Х. Сираждиновым [2]. В настоящей работе эти результаты распространяются на случай цепей с произвольным множеством состояний (те теоремы этого типа были доказаны в [6]). Кроме того, мы докажем теоремы, аналогичные теоремам Крамера [4] и Рихтера ([5] теорема 3).

Итак, пусть X — пространство точек ξ, $\mathfrak{F}_X$ — σ-алгебра его подмножеств, $p(\xi, A)$ — функция вероятностей перехода. При фиксированном ξ $p(\xi, A)$ является вероятностной мерой, а при фиксированном A измерима относительно $\mathfrak{F}_X$.

Пусть $p(\xi, A)$ удовлетворяет следующему условию: *существует целое положительное k_0 такое, что*

$$\sup_{\xi, \eta, A} \left| p^{(k_0)}(\xi, A) - p^{(k_0)}(\eta, A) \right| = \delta < 1, \qquad (0.1)$$

$$A \in \mathfrak{F}_X, \ \xi, \ \eta \in X,$$

где $p^{(k_0)}(\xi, A)$ — *функция вероятностей перехода за k_0 шагов.*

При выполнении условия (0.1) существует стационарное распределение $\pi(A)$ такое, что

$$\sup_{\xi \in X, \ A \in \mathfrak{F}_X} \left| p(A) - p^{(n)}(\xi, A) \right| \leqslant \delta^{\left[\frac{n}{k_0}\right]} < \gamma \rho^n, \qquad (0.2)$$

где $\gamma = \delta^{-1}$, $\rho = \delta^{\frac{1}{k_0}}$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что условие (0.1) выполняется.

Рассмотрим последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, определенную следующим образом:

$$\mathbf{P}(x_1 \in A) = \pi(A),$$

$$\mathbf{P}(x_n \in A) = \int_X p^{(n-1)}(\xi, A)\, \pi(d\xi). \qquad (0.3)$$

Пусть $f(\xi)$ — действительная функция, определенная на X и измеримая

относительно $\mathfrak{F}_X$. Если $\pi(A) = p(A)$ и $\int\limits_X f^2(\xi)\, p(d\xi) < \infty$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \left(f(x_k) - \int\limits_X f(\eta)\, p(d\eta)\right)\right]^2 = \sigma^2 \geqslant 0. \qquad (0.$$

Обозначим через $F_{n\pi}(x)$ функцию распределения нормированной сумм

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n+1} \left(f(x_k) - \int\limits_X f(\eta)\, p(d\eta)\right),$$

а через $\Phi(x)$ — нормальную функцию распределения.

Теорема 1. *Если существует функция действительного переменного* $g(x) > 0$ *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty, \qquad (0.$$

$$\sup_\xi \int\limits_X |f(\eta)|^3 g(|f(\eta)|)\, p(\xi, d\eta) < \infty,$$

$$m_{11} = \int\limits_X |f(\xi)|\, \pi(d\xi) < \infty \quad \text{и} \quad \sigma^2 > 0,$$

то равномерно по x

$$|F_{n\pi}(x) - \Phi(x)| < c_1 \frac{m_3\, c(\rho)}{\sigma^3\sqrt{n}} + c_2 \frac{m_{11}}{\sigma\sqrt{n}} + c_3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho\right)^n \left(1 + \frac{m_{11}}{\sigma}\right),$$

где

$$m_3 = \sup_\xi \int\limits_X |f(\eta)|^3\, p(\xi, d\eta),$$

$$c(\rho) = \left[136\, M^3(\rho) + \frac{32}{3} M^2(\rho) + 1\right],$$

$$M(\rho) = \frac{1}{1-\rho}[2 \cdot 3^{k_0} k_0 (1 + 2\rho) + [3],$$

c_1, c_2, c_3 *— постоянные, не зависящие от* $p(\xi, \cdot)$ *и* $\pi(\cdot)$.

Введем теперь несколько условий, которые в различных комбинация фигурируют в сформулированных ниже теоремах.

Условие (A). *Существует* $C \in \mathfrak{F}_X$ *такое, что* $p(C) > 0$ *и* $0 < m < p_0(\xi, \eta) < M < \infty$ *для* $\xi, \eta \in C$, *где* $p_0(\xi, \eta)$ *— плотность абсолютно непрерывной относительно* $p(\cdot)$ *компоненты* $p(\xi, \cdot)$, *причем* $p_0(\xi, \eta)$ *измерима относительно* $\mathfrak{F}_X \times \mathfrak{F}_X$.

Условие (B_k). *Существует функция действительного переменного* g *такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

и

$$\sup_\xi \int\limits_X |f(\eta)|^k g(|f(\eta)|)\, p(\xi, d\eta) < \infty.$$

Условие (C). *Пусть* X *— счетное множество состояний* ξ_i, *образующее положительный класс,* $f(\xi_i) = a + k_i h$, *где* k_i *— целое число,* a *произвольное действительное число,* $h > 0$ *и для любых* i *и* j *можно найти индекс* k *такой, что* $p_{ik} > 0$ *и* $p_{jk} > 0$ $(p_{ik} = p(\xi_i, \xi_k))$.

Условие (*D*). *Существуют постоянные* $A > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\left|\int_X e^{zf(\eta)}\, p(\xi, d\eta)\right| < M, \quad \left|\int_X e^{zf(\xi)}\, \pi(d\xi)\right| < M$$

номерно относительно $\xi \in X$ *и* $|z| \leqslant A$. Заметим, что при выполнении ого из условий (*A*) и (*C*) $\sigma > 0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (*A*) *и* (B_k) *при* $k = 3$, *распределе-* $F(x) = \mathbf{P}\{\xi : f(\xi) < x\}$ *не является решетчатым и*

$$\int_X |f(\xi)|\, \pi(d\xi) < \infty,$$

равномерно по x

$$F_{n\pi}(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{Q_{1\pi}(x)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

сь $Q_1(x) = \frac{\lambda_{3p}}{6}(1 - x^2) + \lambda_\pi$, *где*

$$\lambda_{3p} = \frac{1}{\sigma^3}\left[M_p \overline{f}^3(x_1) + 3\sum_{k=1}^{\infty} M_p \overline{f}^2(x_1)\, \overline{f}(x_{k+1}) + \right.$$

$$\left. + 3\sum_{k=1}^{\infty} M_p \overline{f}(x_1)\, \overline{f}^2(x_{k+1}) + 6\sum_{k,j=1}^{\infty} M_p \overline{f}(x_1)\, \overline{f}(x_{k+1})\, \overline{f}(x_{k+j+1})\right],$$

$$\lambda_\pi = \frac{1}{\sigma}\sum_{1}^{\infty} M_\pi \overline{f}(x_k), \quad \overline{f}(\xi) = f(\xi) - \int_X f(\eta)\, p(d\eta),$$

вычисляется в предположении, что x_1 *имеет стационарное распре-* *ение,* M_π *— в предположении, что начальным распределением является*).

Теорема 3. *Если выполнены условия* (B_3) *и* (*C*), *общий наибольший де-* *пель* k_l *равен* 1 *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\xi_k)|\, \pi(\xi_k) < \infty,$$

равномерно по x

$$F_{n\pi}(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{Q_{1\pi}(x)}{\sqrt{n}} + \frac{S_1(x)}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$S_1(x) = \frac{h}{\sigma} S\left(\frac{(x + a_n)\,\sigma\sqrt{n}}{h}\right),$$

$$S(x) = [x] - x + \frac{1}{2}, \quad a_n = -\frac{\sqrt{n}\, a}{\sigma};$$

(x) *определяется так же, как в теореме* 2.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (B_k) *и* (*C*), *общий наибольший дели-* *ль* k_l *равен* 1 *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(\xi_i)|^{k-2}\, \pi(\xi_i) < \infty,$$

то равномерно по S

$$\mathfrak{P}_{\pi n+1}(s) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\left\{\varphi(z_{ns}) + \sum_{1}^{k-2}\frac{1}{(\sqrt{n})^m}P_{m\pi}(-\varphi(z_{ns}))\right\} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{k-1}}\right),$$

где

$$\mathfrak{P}_{\pi n}(s) = \mathbf{P}\left(\sum_{1}^{n} f(x_t) = an + sh\right)$$

при условии, что начальным распределением служит $\pi_t = \pi(\xi_t)$,

$$\sigma\sqrt{n}z_{ns} = a(n+1) + sh - (n+1)\sum_{1}^{\infty} f(\xi_t)\,p(\xi_t);$$

$P_{m\pi}(n)$ *— многочлены степени* $3m$, *коэффициенты которых зависят от начального распределения* π_t *и* $P_{m\pi}(-\varphi)$ *вычисляется как* $P_{m\pi}(-u)$ *с заменой* u^r *на*

$$\varphi^{(r)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d^r}{dx^r}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теорема 5. *Если выполнены условия* (A) *и* (B_k),

$$\int_X |f(\xi)|^{k-2}\pi(d\xi) < \infty$$

и

$$\liminf_{\theta\to\infty}\iint_{CC}\sin^2(f(\xi) - f(\eta))\,\theta p(d\xi)\,p(d\eta) > 0,$$

то равномерно по x

$$F_{n\pi}(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{1}^{k-2}\frac{Q_{s\pi}(x)}{(\sqrt{n})^s} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{k-2}}\right).$$

Здесь $\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{x^2}{2}}Q_{s\pi}(x) = P_{s\pi}(-\Phi)$, *где* $P_{s\pi}(-\Phi(x))$ *вычисляется как и в теореме* 4.

Теорема 6. *Если выполнено условие* (D), $x = o(\sqrt{n})$ *и* $x > 1$, *то*

$$\frac{1 - F_{n\pi}(x)}{1 - \Phi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\mu\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

и

$$\frac{F_{n\pi}(-x)}{\Phi(-x)} = e^{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\mu\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\mu(t)$ *— степенной ряд, сходящийся при достаточно малых по абсолютной величине* t.

Теорема 7. *Если выполнены условия* (C) *и* (D), *общий наибольший дели*

гль k_i равен 1 и $|z_{nk}| = o(\sqrt{n})$, $|z_{nk}| > 1$ (см. теорему 4), то

$$\frac{\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\mathfrak{P}_n(k)}{\varphi(z_{nk})} = e^{\frac{z_{nk}^3}{\sqrt{n}}\mu\left(\frac{z_{nk}}{\sqrt{n}}\right)}\left[1 + O\left(\frac{|z_{nk}|}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

е $\mu(t)$ — ряд, фигурирующий в теореме 6, $\varphi(x)$ — плотность нормального распределения.

§ 1. Доказательство теорем 1 — 5

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — банахово пространство, ограниченных комплексных функций $g(\xi)$, $\xi \in X$, $\mathfrak{M}^*$ — банахово пространство комплексных вполне конечных ер $\mu(A)$, $A \in \mathfrak{F}_X$, с нормой $\|\mu\| = |\mu|(X)$, где $|\mu|(\cdot)$ — полная вариация еры $\mu(\cdot)$. Определим линейный оператор $P(\theta)$ в $\mathfrak{M}$ следующим образом

$$P(\theta)g = \int_X e^{i\theta f(\eta)}\, p(\xi, d\eta). \tag{1.1}$$

дальнейшим мы будем обозначать оператор $P(0)$ через P. Пусть $R(z, \theta)$ $R(z)$ — резольвентные операторы соответственно для $P(\theta)$ и P. Если

$$\|P(\theta) - P\| < \frac{1}{\|R(z)\|},$$

о

$$R(z, \theta) = \sum_0^\infty R(z)[(P(\theta) - P)R(z)]^k. \tag{1.2}$$

усть I_1 и I_2 — окружности с центрами соответственно в точках 1 и 0 и адиусами $\rho_1 = \frac{1-\rho}{3}$ и $\rho_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho$. Если $\|P(\theta) - P\| < \frac{1}{M_\rho}$, где $M_\rho = \sup\|R(z)\|$ в замкнутой области, внешней по отношению к кругам, ограниченным окружностями I_1 и I_2, то I_1 и I_2 лежат в резольвентном множестве оператора $P(\theta)$.

По лемме 1.1. из [6] существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\|P(\theta) - P\| < \varepsilon$

$$P^n(\theta) = \lambda^n(\theta)P_1(\theta) + P^n(\theta)P_2(\theta), \tag{1.3}$$

де

$$P_1(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_1} R(z, \theta)\, dz, \quad P_2(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_2} R(z, \theta)\, dz,$$

$$\lambda(\theta) = \frac{(P(\theta)P_1(\theta)\psi, p)}{(P_1(\theta)\psi, p)},$$

— функция, тождественно равная 1. Символом (g, μ), $g \in \mathfrak{M}$, $\mu \in \mathfrak{M}^*$, здесь в дальнейшем, обозначается функционал $\int_X g(\xi)\mu(d\xi)$, ε выбирается таким бразом, чтобы при $\|P(\theta) - P\| < \varepsilon$ выполнялось неравенство $\|P_1(\theta) - P_1\| < 1$, де $P_1 = P_1(0)$. Нетрудно видеть, что

$$P_1 g = \int_X g(\xi)\, p(d\xi), \quad g \in \mathfrak{M},$$

где $p(\cdot)$ — стационарное распределение. Из определения $P_1(\theta)$ следует, что

$$\| P_1(\theta) - P_1 \| < \frac{1}{2\pi} \int_{I_1} \| R(z, \theta) - R(z) \| dz. \tag{1.4}$$

В силу (1.2) для z на I_1

$$\| R(z, \theta) - R(z) \| < \frac{M_\rho^2 \| P(\theta) - P \|}{1 - M_\rho \| P(\theta) - P \|}. \tag{1.5}$$

С другой стороны, $\| P^n - P_1 \| \leqslant 2\delta^{\left[\frac{n}{k_0}\right]} < 2\gamma\rho^n$,

$$P(z) = \frac{1}{z-1} P_1 + \sum_{0}^{\infty} (P^n - P_1) z^{-n-1}, \quad |z| < \rho \tag{1.6}$$

(ср. [6] стр. 392) и, следовательно,

$$M_\rho < \frac{1}{1-\rho} [2 \cdot 3^{k_0} k_0 (1 + 2\rho) + 3] = M(\rho). \tag{1.7}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{M^2(\rho)} < \frac{1}{2M(\rho)}. \tag{1.8}$$

Из (1.4), (1.5) и (1.8) следует, что ε можно положить равным $\frac{1}{2} M^{-2}(\rho)$. Поскольку

$$\| P(\theta) - P \| \leqslant m_1 |\theta|, \tag{1.9}$$

где

$$m_1 = \sup_{\xi} \int_X |f(\eta)| p(\xi, d\eta),$$

то разложение (1.3) справедливо для

$$|\theta| < \frac{1}{2M^2(\rho) m_1}. \tag{1.10}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{M} e^{i\theta S_n} = (P^n(\theta) \psi, \pi(\theta)), \tag{1.11}$$

где

$$\pi(\theta, A) = \int_A e^{i\theta f(\xi)} \pi(d\xi).$$

Следовательно, для $|\theta| < \frac{1}{2M^2(\rho) m_1}$

$$\mathbf{M} e^{i\theta S_n} = \lambda^n(\theta) (P_1(\theta) \psi, \pi(\theta)) + (P^n(\theta) P_2(\theta) \psi, \pi(\theta)). \tag{1.12}$$

Не нарушая общности, мы можем полагать, что $\lambda'(0) = 0$, т. е.

$$\int_X f(\xi) p(d\xi) = 0. \tag{1.13}$$

Лемма 2.1. *При*

$$|\theta| < \frac{\sigma^3 \sqrt{n}}{5\beta_3} = T_n$$

имеет место неравенство

$$\left| \lambda^n \left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{\theta^2}{2}} \right| < \frac{13}{6} \frac{|\theta|^3 \beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{15}},$$

$$\beta_3 = (136\, M^3(\rho) + \frac{32}{3} M^2(\rho) + 1)\, m_3.$$

Доказательство. Нетрудно видеть (см. [6], стр. 394), что

$$(P(\theta) P_1(\theta)\psi, p) = 1 + \sum_1^\infty B_k(\theta),$$

$$(P_1(\theta)\psi, p) = 1 + \sum_1^\infty C_k(\theta), \tag{1.14}$$

$$B_k(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_1} z\, R(z)\, A^k(z, \theta)\, dz\, \psi,\ p\right),$$

$$C_k(\theta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_1} R(z)\, A^k(z, \theta)\, dz\psi,\ p\right) \tag{1.15}$$

$$A(z, \theta) = (P(\theta) - P)\, R(z).$$

метим, что ([6], стр. 395)

$$B_1(\theta) = \int_X e^{i\theta f(\xi)}\, p(d\xi) - 1,\ C_1(\theta) = 0. \tag{1.16}$$

оме того, из (1.6) следует, что

$$R(z)\psi = \frac{P_1}{1-z}. \tag{1.17}$$

означим $(P(\theta) P_1(\theta)\psi, p)$ и $(P_1(\theta)\psi, p)$ соответственно $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$. Из 3) — (1.17) выводим $\mu_i'(0) = 0$, $i = 1,2$,

$$b_2 = |\mu_1''(0)| \leqslant \frac{4}{3}\frac{1-\rho}{3}\left(\frac{6}{1-\rho} M^2(\rho) + 1\right) m_2 = \beta_2 < 4\, m_3^{\frac{2}{3}} M^2(\rho),$$

$$C_2 = |\mu_2''(0)| \leqslant \frac{1-\rho}{3}\left(\frac{6}{1-\rho} M^2(\rho) + 1\right) m_2 < \beta_2, \tag{1.18}$$

$$m_2 = \sup_\xi \int_X |f(\eta)|^2\, p(\xi, d\eta).$$

лее

$$|\mu_1'''(\theta)| \leqslant |B_1'''(\theta)| + |B_2'''(\theta)| + \sum_{k=3}^\infty |B_k'''(\theta)|. \tag{1.19}$$

Существование $B_i'''(\theta)$ следует из (0.5). В силу (1.13) — (1.17)

$$|B_1'''(\theta)| \leqslant m_3,\ \ |B_2'''(\theta)| \leqslant \frac{32}{3} M^3(\rho)\, m_3, \tag{1.20}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} |B_k'''(\theta)| \leqslant \frac{4}{3}\sum_{3}^{\infty} k^3 M^k(\rho)\, m_1^{k-3} m_3 |\theta|^{k-3} =$$

$$= \frac{4}{3} M^3(\rho)\, m^3 \sum_{k=3}^{\infty} [(k+1)k(k-1)+k] |m_1 M(\rho)\theta|^{k-3} =$$

$$= \frac{4}{3} M^3(\rho)\, m_3 (6w^4 + w^2 + w), \text{ где } w = \frac{1}{1 - m_1 M(\rho)|\theta|}. \quad (1.2$$

Таким образом, если $|\theta| < \frac{1}{2m_1 M(\rho)}$, то

$$|\mu_1'''(\theta)| \leqslant (136 M^3(\rho) + \frac{32}{3} M^2(\rho) + 1) m_3 = \beta_3. \quad (1.2$$

Аналогично, для $|\theta| < \frac{1}{2m_1} M^{-1}(\rho)$

$$|\mu_2'''(\theta)| < \beta_3. \quad (1.23$$

Очевидно,

$$\beta_3 > 136 M^3(\rho) m_3. \quad (1.24$$

Далее

$$\mu_1\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{b_2}{\sigma\sqrt{n}}\theta^2 + \mu_1'''\left(\frac{\bar{\theta}}{\sigma\sqrt{n}}\right)\frac{\theta^3}{\sigma^3(\sqrt{n})^3}, \quad 0 \leqslant |\bar{\theta}| \leqslant |\theta|. \quad (1.25$$

Нетрудно видеть, что

$$\sigma^2 = \mathbf{M} f^2(x_1) + 2\sum_{1}^{\infty} \mathbf{M} f(x_1) f(x_{k+1}), \quad (1.26$$

где математические ожидания вычисляются в предположении, что $\pi(\cdot) = p(\cdot)$ (см. [6], стр. 405). С другой стороны,

$$|\mathbf{M} f(x_1) f(x_{k+1})| < 2\delta^{\frac{1}{2}\left[\frac{k}{k_0}\right]} \mathbf{M} f^2(x_1) \quad (1.27$$

(ср. [7], стр. 203, лемма 7.1). Следовательно,

$$\sigma^2 < \left(1 + 4k_0 \frac{1}{1-\sqrt{\rho}}\right) m_2 < \frac{5k_0}{1-\rho} m_2. \quad (1.28$$

Из (1.7), (1.24) и (1.28) выводим

$$\frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sigma^2}{5\beta_3} < \frac{m_2}{272 m_3 M^2(\rho)} < \frac{1}{2 m_1 M^2(\rho)}. \quad (1.29$$

Следовательно, для $|\theta| \leqslant T_n$

$$\left|\mu_1\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \geqslant 1 - \frac{\beta_2 T_n^2}{2\sigma^2 n} - \beta_3 \frac{T_n^3}{6\sigma^3(\sqrt{n})^3} > 1 - \frac{\beta_2^3}{50 B_3^2}\left(1 + \frac{1}{15}\right) > \frac{44}{45}, \quad (1.30$$

скольку $\sigma^2 < \beta_2$ и $\beta_2^3 < \beta_3^2$. Аналогично для $|\theta| < T_n$

$$\frac{44}{45} < \left|\mu_2\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| < \frac{46}{45}. \tag{1.31}$$

этому для $|\theta| \leqslant T_n$

$$\lambda^n\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \exp\left[n\left(\log\mu_1\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \log\mu_2\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right]. \tag{1.32}$$

)

$$n\left[\log\mu_1\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \log\mu_2\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] = -\frac{\theta^2}{2} - \frac{n\theta^3\alpha}{6(\sigma\sqrt{n})^3}, \tag{1.33}$$

e

$$\alpha = \left[\frac{d^3}{d\theta^3}\log\frac{\mu_1(\theta)}{\mu_2(\theta)}\right]_{\theta=\frac{\bar{\theta}}{\sigma\sqrt{n}}}, \quad 0 < |\bar{\theta}| < |\theta|. \tag{1.34}$$

етрудно показать, что

$$|\alpha| < 13\beta_3. \tag{1.35}$$

з (1.33) заключаем, что

$$\left|\lambda^n\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right| = e^{-\frac{\theta^2}{2}}\left|e^{\frac{\theta^3\alpha}{6\sigma^3\sqrt{n}}} - 1\right|. \tag{1.36}$$

ак как

$$|e^\beta - 1| \leqslant |\beta|\exp(|\beta|), \tag{1.37}$$

)

$$\left|\lambda^n\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right| \leqslant e^{-\frac{\theta^2}{2}} \cdot \frac{13}{6}\frac{|\theta|^3\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}\exp\left(\frac{13}{6}\frac{|\theta|^3\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}}\right). \tag{1.38}$$

аконец, для $|\theta| \leqslant T_n$

$$\frac{13}{6}\frac{|\theta|^3\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}} < \frac{13}{30}\theta^2. \tag{1.39}$$

з (1.38) и (1.39) следует утверждение леммы. Продолжим теперь доказательство теоремы 1. В силу (1.4), (1.5) и (1.9) для $|\theta| < \frac{\sigma\sqrt{n}}{2m_1}M^{-2}(\rho)$

$$\left\|\left(P_1\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\psi, \pi\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) - 1\right\| \leqslant \left(2m_1M^2(\rho) + m_{11}\right)\frac{|\theta|}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{1.40}$$

ак как $\int_{\Gamma_z} z^n R(z)\psi\, dz = 0$, то

$$P^n(\theta)P_2(\theta)\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z} z^n R(z,\theta)\psi\, dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\Gamma_z} z^n(R(z,\theta) - R(z))\psi dz.$$

ледовательно, для $|\theta| < \frac{\sigma\sqrt{n}}{2m_1}M^{-2}(\rho)$

$$\left|\left(P^n\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)P_2\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\psi, \pi\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right| \leqslant (2m_1M^2(\rho) + m_{11})\rho_2^n\frac{|\theta|}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{1.41}$$

Так как $\frac{m_1}{\sigma} M^2(\rho) < \frac{\zeta_3}{\sigma_3}$, то из (1.12), (1.40), (1.41) и леммы 1.1 вытекает, что при $|\theta| < T_n$

$$|f_{n\pi}(\theta) - e^{-\frac{\theta^2}{2}}| < \left(\frac{13}{6}|\theta|^3 + 2|\theta|\right)\frac{\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{15}} +$$

$$+ 2\rho_2^n|\theta|\frac{\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}} + \left(\rho_2^n|\theta| + |\theta| e^{-\frac{\theta^2}{15}}\right)\frac{m_{11}}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad (1.42)$$

где

$$f_{n\pi}(\theta) = Me^{\frac{i\theta s_n}{\sqrt{n}}}.$$

Остается применить теорему Эссеена (см. [1], стр. 211), положив $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и $T = T_n = \frac{\sigma^3\sqrt{n}}{5\beta_3}$.

2. **Лемма 1.2.** *Если* $\pi(\cdot) = p(\cdot)$, $\int_X f(\xi)\, p(d\xi) = 0$ *и выполнено условие* (B_3)

$$i^{-3}\left[\frac{d^3}{d\theta^3}\ln\lambda(\theta)\right]_{\theta=0} = \mathbf{M} f^3(x_1) + 3\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M} f^2(x_1) f(x_{k+1}) +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M} f(x_1) f^2(x_{k+1}) + 6\sum_{k,l=1}^{\infty}\mathbf{M} f(x_1) f(x_{k+1}) f(x_{k+l+1}).$$

Доказательство. Нетрудно показать, используя (1.12), что

$$i^{-3}\left[\frac{d^3}{d\theta^3}\ln\lambda(\theta)\right]_{\theta=0} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbf{M}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))^3 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i,j,k}^{n}\mathbf{M} f(x_i) f(x_j) f(x_k). \qquad (1.43)$$

$$\mathbf{M} f(x_1) f(x_{i+1}) f(x^{i}{}_{+k+1}) = \int_X f(\xi_1)\, p(d\xi_1) \int_X f(\xi_2) V_k(\xi_1, d\xi_2) \int_X f(\xi_3) V_i(\xi_2, d\xi_3), \qquad (1.44)$$

где $V_k(\xi, A)$ — полная вариация $p^{(k)}(\xi, \cdot) - p(\cdot)$ на A. Применяя неравенство Гёльдера, последовательно получаем:

$$|M f(x_1) f(x_{i+1}) f(x_{i+k+1})| \leqslant \left[\int_X |f(\xi_1)|^3 p(d\xi_1)\right]^{\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left|\int_X p(d\xi_1)\left(\int_X |f(\xi_2)| V_i(\xi_1, d\xi_2)\int_X |f(\xi_3)| V_k(\xi_2, d\xi_3)\right)^{\frac{3}{2}}\right|^{\frac{2}{3}}, \qquad (1.45)$$

$$\int_X |f(\xi_2)| V_i(\xi_1, d\xi_2)\int_X |f(\xi_3)| V_k(\xi_2, d\xi_3) \leqslant$$

$$\leqslant V_i^{\frac{1}{3}}(\xi_1, X)\left[\int_X |f(\xi_2)|^{\frac{3}{2}}\left(\int_X |f(\xi_3)| V_k(\xi_2, d\xi_3)\right)^{\frac{3}{2}} V_i(\xi_1, d\xi_2)\right]^{\frac{2}{3}}, \qquad (1.46)$$

$$\int_X |f(\xi_2)|^{\frac{3}{2}} \left(\int_X |f(\xi_3)|\, V_k(\xi_2, d\xi_3)\right)^{\frac{3}{2}} p(d\xi_2) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_X |f(\xi_2)|^3\, p(d\xi_2)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_X \left(\int_X |f(\xi_3)|\, V_k(\xi_2, d\xi_3)\right)^3 p(d\xi_2)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_X |f(\xi_3)|\, V_k(\xi_2, d\xi_3) \leqslant V_k^{\frac{2}{3}}(\xi_2, X) \left(\int_X |f(\xi_3)|^3 V_k(\xi_2, d\xi_3)\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{1.47}$$

з (0.2), (1.44) — (1.47), учитывая, что $V_j(\xi, \cdot) \leqslant p^{(j)}(\xi, \cdot) + p(\cdot)$, заключаем

$$|M f(x_1) f(x_{i+1}) f(x_{i+k+1})| < 4\gamma\rho^{\frac{i}{3}+\frac{2}{3}k} M|f(x_1)|^3. \tag{1.48}$$

алее,

$$\sum_{i,j,k}^{n} \mathbf{M} f(x_i) f(x_j) f(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M} f^3(x_i) + 3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n-i} \mathbf{M} f^2(x_i) f(x_{i+m}) +$$

$$+ 3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n-i} \mathbf{M} f(x_i) f^2(x_{i+m}) + 6 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i} \sum_{m=1}^{n-i-k} \mathbf{M} f(x_i) f(x_{i+k}) f(x_{i+k+m}) =$$

$$= n \left[\mathbf{M} f^3(x_1) + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M} f^2(x_1) f(x_{k+1}) + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M} f(x_1) f^2(x_{k+1}) + \right.$$

$$\left. + 6 \sum_{k+j \leqslant n-1} \mathbf{M} f(x_1) f(x_{k+1}) f(x_{k+j+1}) \right] -$$

$$- 3 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\mathbf{M} f^2(x_1) f(x_{k+1}) + \mathbf{M} f(x_1) f^2(x_{k+1})\right] -$$

$$- 6 \sum_{k+j \leqslant n-1} (k+j)\, \mathbf{M} f(x_1) f(x_{k+1}) f(x_{k+j+1}). \tag{1.49}$$

з (1.43), (1.48) и (1.49) следует утверждение леммы.

Лемма 1.3. *Если выполнено условие* (*B*) *для* $k = 1$, *то*

$$i^{-1} \left[\frac{d}{d\theta} (P_1(\theta)\psi, \pi(\theta)\right]_{\theta=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \pi(d\xi) \int_X \overline{f}(\eta)\, p^{(k)}(\xi, d\eta) + \int_X \overline{f}(\xi)\, \pi(d\xi), \tag{1.50}$$

де $\overline{f}(\xi) = f(\xi) - \int_X f(\eta)\, p(d\eta)$.

Для доказательства нужно воспользоваться разложением (1.2).

Лемма 1.4. *Если выполняется условие* (*C*) *и общий наибольший делитель* k_i *равен* 1, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $c_\varepsilon > 0$, *что при* $n > n_0$ (n_0 *не зависит от* ε)

$$\| P^n(\theta) \| < e^{-c_\varepsilon n},$$

если $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{h} - \varepsilon$.

Лемма 1.4 была, по существу, доказана в [6]. Дело в том, что из ус ловия

$$\inf_{(i,j)} \sum_{k=1}^{\infty} \min(p_{ik}, p_{jk}) > 0,$$

которое приведено в формулировке леммы 3.1 в [6], вытекает условие: *для любого k существуют i и j такие, что одновременно $p_{ik} > 0$ и $p_{jk} > 0$* что и используется в доказательстве.

Лемма 1.5. *Если выполнено условие (A), то существует q такое, что*

$$|f_{n\pi}(\theta)| \leqslant \left[1 - \frac{m^4}{2M} p(C) \iint_{CC} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(f(\eta) - f(\lambda)\right) p(d\eta)\, p(d\lambda)\right]^{\left[\frac{n}{q}\right]}.$$

Доказательство. Пусть последовательность комплексных вполне конечных мер $p^{(n)}(\theta, \xi, A)$ определяется следующим образом:

$$p^{(1)}(\theta, \xi, A) = p(\theta, \xi, A) = \int_A e^{i\theta f(\eta)} p(\xi, d\eta),$$

$$p^{(n)}(\theta, \xi, A) = \int_A p^{(n-1)}(\theta, \eta, A)\, p(\theta, \xi, d\eta).$$

Пусть $\mu(\xi, \cdot)$ — сингулярная компонента $p(\xi, \cdot)$. Нетрудно видеть, что

$$p^{(2)}(\theta, \xi, A) = \int_A p(d\zeta) \int_X e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta) +$$

$$+ \int_A p(d\zeta) \int_X e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))} p_0(\eta, \zeta)\, \mu(\xi, d\eta) +$$

$$+ \int_X p(d\eta) \int_A e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))} p_0(\xi, \eta)\, \mu(\eta, d\zeta) + \int_X \mu(\xi, d\eta) \int_A e^{i\theta(f(\eta)+f(\zeta))} \mu(\eta, d\zeta).$$

Следовательно, полная вариация $p^{(2)}(\theta, \xi, \cdot)$ удовлетворяет неравенству

$$V^{(2)}(\theta, \xi, X) \leqslant 1 - \int_X p(d\zeta) \left\{ \int_X p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta) - \right.$$

$$\left. - \left| \int_X p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta) e^{i\theta f(\eta)} p(d\eta) \right| \right\}. \tag{1.51}$$

Далее,

$$\left| \int_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta) \right|^2 =$$

$$= \iint_{XX} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p_0(\xi, \lambda)\, p_0(\lambda, \zeta) \cos\theta \left(f(\eta) - f(\lambda)\right) p(d\eta)\, p(d\lambda). \tag{1.52}$$

Отсюда в силу условия (A) для $\xi \in C$, $\zeta \in C$

$$\left[\int_X p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta)\right]^2 - \left| \int_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta) \right|^2 =$$

$$= 2 \iint_{XX} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p_0(\xi, \lambda)\, p_0(\lambda, \zeta) \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(f(\eta) - f(\lambda)\right) p(d\eta)\, p(d\lambda) \geqslant$$

$$\geqslant 2m^4 \iint\limits_{CC} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(f(\eta) - f(\lambda)\right) p(d\eta)\, p(d\lambda). \tag{1.53}$$

С другой стороны, для $\xi \in C, \zeta \in C$

$$\left|\int\limits_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta)\right| + \int\limits_X p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_X p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, d\eta < 2M. \tag{1.54}$$

Из (1.53) и (1.54) следует, что для $\xi \in C, \zeta \in C$

$$\int\limits_X p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta) - \left|\int\limits_X e^{i\theta f(\eta)} p_0(\xi, \eta)\, p_0(\eta, \zeta)\, p(d\eta)\right| >$$

$$> \frac{m^4}{M} \iint\limits_{CC} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(f(\eta) - f(\lambda)\right) p(d\eta)\, p(d\lambda). \tag{1.55}$$

Из (1.55) и (1.51) заключаем, что для $\xi \in C$

$$V^{(2)}(\theta, \xi, X) < 1 - \frac{m^4}{M}\, p(C) \iint\limits_{C\,C} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(f(\eta_i) - f(\lambda)\right) p(d\eta)\, p(d\lambda). \tag{1.56}$$

Берем m так, чтобы $p^{(m)}(\xi, C) > \frac{1}{2} p(C)$, тогда

$$V^{(m+2)}(\theta, \xi, X) \leqslant \int\limits_X V^{(2)}(\theta, \eta, X)\, p^{(m)}(\theta, \xi, d\eta) \leqslant$$

$$1 - \int\limits_C [1 - V^{(2)}(\theta, \eta, X)]\, p^{(m)}(\xi, d\eta) \leqslant 1 - \frac{1}{2} p(C) \left[1 - \sup_{\eta \in C} V^{(2)}(\theta, \eta, X)\right]. \tag{1.57}$$

Из (1.56) и (1.57) следует утверждение леммы.

Лемма 1.6. *Если выполнено условие* (B_k), $\sigma > 0$ *и*

$$\int\limits_X |f(\xi)|^{k-2} \pi(d\xi) < \infty,$$

существует $\Delta > 0$ *такое, что при* $|\theta| < \Delta \sqrt{n}$

$$\left| f_{n\pi}\left(\frac{\theta}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\theta^2}{2}} \left(1 + \sum_{s=1}^{k-2} P_{s\pi}(i\theta) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^s\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(k)}{(\sqrt{n})^{k-2}}\, \delta(n) \left(|\theta|^k + |\theta|^{3(k-2)}\right) + d\, |\theta|\, \rho_2^n,$$

$\delta(n)$ *зависит только от* n *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(n) = 0$, $P_{s\pi}(u)$ *— многочлены, фигурирующие в формулировках теорем* 2—5, $c(k)$ *и* d *— постоянные.*

Доказательство леммы 1.6 опирается на разложение (1.3) и проводится вполне аналогично доказательству соответствующей теоремы для зависимых случайных величин (см. [10] стр. 90).

Теоремы 2—5 доказываются теперь с помощью лемм 1.2—1.6 совершенно так же, как соответствующие предложения для независимых случайных величин (см., например, [1] § 42, 43, 45).

§ 2. Доказательство теорем 6 и 7

1. Определим оператор $P(z)$ и $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$P(z)\,g = \int_X e^{zf(\eta)}\,p(\xi,\,d\eta).$$

Обозначим $P(0)$ через P. Очевидно,

$$\|P(z) - P\| = \sup_{\xi} \int_X |e^{zf(\eta)} - 1|\,p(\xi,\,d\eta). \tag{2.1}$$

Далее,

$$\int_X |e^{zf(\eta)} - 1|\,p(\xi,\,d\eta) \leqslant \int_{|f(\eta)|\leqslant N} |e^{zf(\eta)} - 1|\,p(\xi,\,d\eta) +$$

$$+ \int_{|f(\eta)|>N} |e^{zf(\eta)}|\,p(\xi,\,d\eta) + \int_{|f(\eta)|>N} p(\xi,\,d\eta),$$

$$\int_{|f(\eta)|>N} |e^{zf(\eta)}|\,p(\xi,\,d\eta) \leqslant e^{(\mathrm{Re}z - A_1)N} \int_{|f(\eta)|>N} e^{A_1 f(\eta)} p(\xi,\,d\eta), \tag{2.2}$$

где $|z| < A_1 < A$.

Так как

$$\int_{|f(\eta)|>N} e^{A_1 f(\eta)} p(\xi,\,d\eta) < M$$

равномерно относительно ξ, то

$$\lim_{z\to 0} \|P(z) - P\| = 0. \tag{2.3}$$

Нетрудно показать, дословно повторяя доказательство леммы 1.1 из [6], что для $|z| < A_2$

$$P^n(z) = \lambda^n(z)\,P_1(z) + P^n(z)\,P_2(z), \tag{2.4}$$

где $A_2 < A$ — некоторая постоянная, зависящая от M

$$P_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} R(u,\,z)\,du, \quad P_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} R(u,\,z)\,du,$$

$$\lambda(z) = \frac{(P(z)\,P_1(z)\,\psi,\,p)}{(P_1(z)\,\psi,\,p)},$$

$R(u,\,z)$ — резольвента оператора $P(z)$.

Функция

$$g^{(1)}(\xi,\,u,\,z) = (P(z) - P)\,R(u)\,\psi = \int_X (R(u)\,\psi)\,(e^{zf(\eta)} - 1)\,p(\xi,\,d\eta),$$

$$R(u) = R(u,\,0)$$

при фиксированных u и ξ аналитична для $|\mathrm{Re}z| < A$ и

$$\sup_{\xi,\,|\mathrm{Re}z|<A_2,\,u\in E} |g^{(1)}(\xi,\,z,\,u)| < 1,$$

где E — область, внешняя по отношению к кругам, ограниченным Γ_1 и Γ_2. По индукции заключаем, что функции

$$g^{(k)}(\xi,\,z,\,u) = [(P(z) - P)\,R(u)]^k\,\psi$$

также аналитичны для $|\mathrm{Re}z| < A$, причем

$$\sup_{\xi,\,z,\,u} |g^{(k)}(\xi,\,z,\,u)| \leqslant \left[\sup_{\xi,\,z,\,u} g^{(1)}(\xi,\,z,\,u)\right]^k.$$

довательно, функция

$$(R(u)[(P(z)-P)R(u)]^k\psi,\ p)=\int_X R(u)\,g^{(k)}(\xi,z,u)\,p(d\xi)$$

литична для $|\mathrm{Re}z|<A$ и $u\in E$. Отсюда вытекает, что функции *

$$(P_1(z)\psi,\ p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}(R(u,z)\psi,\ p)\,du,$$

$$(P(z)P_1(z)\psi,\ p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}u\,(R(u,z)\psi,\ p)\,du$$

кже являются аналитическими при $|z|<A_2$ и $u\in E$.

Аналогично доказывается, что функция $(P^n(z)\psi,\ \pi)$ аналитична в поло- $|\mathrm{Re}z|<A$ при любом n. Поскольку $|\lambda(z)|>1-\rho_1$ для $|z|<A_2$, то в лу (2.4) $K(z)=\ln\lambda(z)$ для этих значений $\ln\lambda(z)$ является аналитической нкцией. Возьмем в качестве $\ln\lambda(z)$ его главное значение, стремящееся) при $z\to 0$. Нетрудно убедиться, что

$$\lambda'(0)=\int_X f(\eta)\,p(d\eta),\qquad K''(0)=\sigma^2. \tag{2.5}$$

нарушая общности, можно полагать

$$\int_X f(\eta)\,p(d\eta)=0. \tag{2.6}$$

$K(z)$ разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд вместе со оими производными:

$$K(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\gamma_k z^k}{k!}, \tag{2.7}$$

$$K'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_{k+1}z^k}{k!}, \tag{2.8}$$

$$K''(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_{k+2}z^k}{k!}.$$

рактеристическая функция для $\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$ выражается следующим обра- м:

$$f_n(t)=(P^{n-1}(it)\psi,\ \pi(it)), \tag{2.9}$$

е

$$\pi(z,A)=\int_A e^{zf(\xi)}\pi(d\xi).$$

ответствующую функцию распределения обозначим $W_n(x)$. Пусть $W_{nh}(x)$—

* Интегралы берутся в смысле Бохнера. Функция $R(u,z)$ равномерно непрерывна осительно $u\in E$ и, следовательно, сильно измерима, откуда и вытекает существование тегралов в смысле Бохнера (см. [8], стр. 61).

функция распределения, соответствующая характеристической функции

$$f_{nh}(t) = \frac{(P^{n-1}(h+it)\psi,\ \pi(h+it))}{(P^{n-1}(h)\psi,\ \pi(h))}, \tag{2.10}$$

(h — действительное число и $|h| < A_2$). Легко проверить следующее равенство:

$$W_n(x) = W_{n0}(x) = \left(P^{n-1}(h)\psi,\ \pi(h)\right) \int_{-\infty}^{x} e^{-hy}\, dW_{nh}(y). \tag{2.11}$$

Введем обозначение $F_{nh}(x) = W_{nh}(A_{nh} + x\sqrt{B_{nh}})$, где $B_{nh} = n\lambda''(h)$, $A_{nh} = n\lambda'(h)$.

Лемма 2.1. *Для* $|h| < A_2$

$$|F_{nh}(x) - \Phi(x)| < \frac{K}{\sqrt{n}}, \tag{2.12}$$

где K *— постоянная, не зависящая от* h *и* x.

Нетрудно показать, что для $|h| < A_2$

$$\left| \frac{\lambda^n\left(h + \frac{i\sqrt{\lambda(h)}\,t}{\sqrt{n\lambda''(h)}}\right)}{\lambda^n(h)} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| < \frac{c}{\sqrt{n}} e^{\frac{t^2}{16}}, \tag{2.13}$$

где c — постоянная, не зависящая от h. Для этого можно воспользоваться методом, с помощью которого доказывается лемма 1.1.

Из (2.13), применяя теорему Эссеена (см., например, [1] стр. 211) мы легко получаем утверждение леммы. В силу (2.11)

$$1 - F_n\left(\frac{A_{nh}}{\sqrt{B_n}}\right) = (P^{n-1}(h)\psi,\ \pi(h))\, e^{-hA_{nh}} \int_0^{\infty} e^{-h\sqrt{B_{nh}}y}\, dF_{nh}(y),$$

$$F_n(x) = F_{n0}(x). \tag{2.14}$$

Далее, в силу (2.4) равномерно для $|h| < A_2$

$$(P^{n-1}(h)\psi,\ \pi(h)) = \lambda^{n-1}(h)\,(P_1(h)\psi,\ \pi(h)) + O(\rho_2^n). \tag{2.15}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$(P_1(h)\psi,\ \pi(h)) = 1 + O(h). \tag{2.16}$$

Поэтому

$$1 - F_n\left(\frac{A_{nh}}{\sqrt{B_n}}\right) = \lambda^{n-1}(h) \int_0^{\infty} e^{-h\sqrt{B_{nh}}y}\, dF_{nh}(y)\,|1 + O(h)| + O(\rho_2^n). \tag{2.17}$$

Дальнейшие рассуждения совпадают, по существу, с рассуждениями Крамера [4]. Обозначим $K'(h)$ и $K''(h)$ соответственно $m(h)$ и $z^2(h)$. Рассмотрим уравнение

$$\sigma\tau = m(h). \tag{2.18}$$

Для достаточно малых по абсолютной величине z это уравнение имеет р

ние h, разлагающееся по степеням τ

$$h = \frac{\tau}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4}\tau^2 - \frac{\sigma^2\gamma_4 - 3\gamma_3^2}{6\sigma^7}\tau^3 + \ldots . \qquad (2.19)$$

евидно,

$$hm(h) - K(h) = \sum_2^\infty \frac{k-1}{k!}h^k.$$

меняя h его разложением (2.19), получаем

$$hm(h) - K(h) = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{\gamma_3}{6\sigma^3}\tau^3 - \frac{\sigma^2\gamma_4 - 3\gamma_3^2}{24\sigma^6}\tau^4 + \ldots . \qquad (2.20)$$

мечая, что $\tau^2 = \frac{m^2(h)}{\sigma^2}$, мы видим, что

$$\frac{m^2(h)}{2\sigma^2} - hm(h) + K(h) = \tau^2\mu(\tau), \qquad (2.21)$$

е $\mu(\tau)$ разлагается в степенной ряд $\mu(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \ldots$, сходящийдля достаточно малых по модулю τ.

В силу доказанной выше леммы

$$F_{nh}(x) = \Phi(x) + Q_{nh}(x), \qquad (2.22)$$

е $Q_{nh}(x)$ — функция ограниченной вариации и

$$|Q_{nh}(x)| < \frac{K}{\sqrt{n}}. \qquad (2.23)$$

этому для $h > 0$, если только $\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n}h > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-h\sqrt{B_{nh}}y}\,dF_{nh}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}y - \frac{1}{2}y^2}dy - Q_{nh}(0) +$$

$$h\sigma(h)\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-h\sigma(h)\sqrt{n}y}Q_{nh}(y)dy = e^{\frac{nm^2(h)}{2\sigma^2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{m(h)\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right][1 + O(h)]. \qquad (2.24)$$

дставляя полученное выражение в (2.17), получаем

$$\frac{1 - F_n\left(\frac{m(h)}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{m(h)\sqrt{n}}{\sigma}\right)} = \exp\left[n\left(\frac{m^2(h)}{2\sigma^2} - hm(h) + K(h)\right)\right][1 + O(h)]. \qquad (2.25)$$

сть теперь x — действительное число такое, что $x > 1$ и $x = o(\sqrt{n})$. ссмотрим уравнение

$$x = \frac{m(h)\sqrt{n}}{\sigma}, \qquad (2.26)$$

торое после подстановки $\tau = \frac{x}{\sqrt{n}}$ переходит в уравнение (2.18).

Следовательно, для достаточно больших n уравнение (2.26) обладает

одним и только одним положительным корнем h, который стремится к
когда n стремится к бесконечности.

Согласно (2.21)

$$\frac{m^2(h)}{2\sigma^2} - hm(h) + K(h) = \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^3 \mu\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

Поскольку $h \sim \frac{\tau}{\sigma} = \frac{x}{\sigma\sqrt{n}}$, то $\liminf_{n\to\infty} h\sqrt{n} > 0$.

Следовательно, в (2.25) можно положить h равным корню уравнени
(2.26). В результате получаем первое из утверждений теоремы 1. Втор
утверждение доказывается аналогичным способом.

2. Пусть $f_{n\tau}(z)$ — производящая функция моментов случайной величин
$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)$. Тогда для z в полосе $|\mathrm{Re}z| < A$

$$f_{n\tau}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{P}_n(k)\, e^{z(a(n+1)+kh)}.$$

Очевидно, $f_{n\tau}(z)$ аналитична в этой полосе. Следовательно ($|C| < A$),

$$\mathfrak{P}_n(k) = \frac{h}{2\pi i} \int_{C-i\frac{\pi}{h}}^{C+i\frac{\pi}{h}} f_{n\tau}(z)\, e^{-z(a(n+1)+kh)}\, dz. \qquad (2.2$$

Полагая $\frac{a(n+1)+kh}{\sigma\sqrt{n}} = x_{kn} = x$ и $\frac{x}{\sqrt{n}} = \tau$, получаем

$$\mathfrak{P}_n(k) = \frac{h}{2\pi i} \int_{C-i\frac{\pi}{h}}^{C+i\frac{\pi}{h}} f_{n\tau}(z)\, e^{-z\sigma\tau h}\, dz. \qquad (2.2$$

Пусть z_0 — решение уравнения

$$\frac{d}{dz}[K(z) - \sigma\tau z] = K'(z) - \sigma\tau.$$

Положим $C = z_0$ и выберем $\varepsilon < \frac{1}{2} A_2$ таким, что для $|t| < \varepsilon$, $|z_0| < \varepsilon$.

$$K''(z_0) > \frac{\sigma^2}{2}, \qquad |\lambda(z_0 + it)| < |\lambda(z_0)|\left(1 - \frac{K''(z_0)\, t^2}{4}\right). \qquad (2.2$$

Предположим, для определенности, что $\tau > 0$. Очевидно,

$$\mathfrak{P}_n(k) = \frac{h}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3), \qquad (2.3$$

где

$$I_1 = \int_{z_0 - i\sqrt{\tau}}^{z_0 + i\sqrt{\tau}} f_{n\tau}(z) e^{-n\sigma\tau z}\, dz,$$

$$I_2 = \int_{z_0 - i\varepsilon}^{z_0 - i\sqrt{\tau}} + \int_{z_0 + i\sqrt{\tau}}^{z_0 + i\varepsilon}, \quad I_3 = \int_{z_0 - i\frac{\pi}{h}}^{z_0 - i\varepsilon} + \int_{z_0 + i\varepsilon}^{z_0 + i\frac{\pi}{h}}.$$

илу (2.4)

$$I_1 = \left(P_1(z_0)\psi,\ \pi(z_0)\right)\int\limits_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} \lambda^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z}\, dz + \int\limits_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} \left[\left(P_1(z)\psi,\ \pi(z)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(P_1(z_0)\psi,\ \pi(z_0)\right)\right] \lambda^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z}\, dz + O\left(\rho_2^n e^{-n\sigma\tau z_0}\right). \qquad (2.31)$$

трудно видеть, что

$$\int\limits_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} \lambda^n(z)\, e^{-n\sigma\tau z}\, dz =$$

$$= \frac{ie^{n\{K(z_0)-z_0\tau\sigma\}}}{\sqrt{nK''(z_0)}} \int\limits_{-\sqrt{\tau nK''(z_0)}}^{\sqrt{\tau nK''(z_0)}} e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\rho_j(z_0)(it)^j}{j!\, n^{\frac{j}{2}-1}}\right\} dz, \qquad (2.32)$$

$$\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\rho_j(z_0)(it)^j}{j!\, n^{\frac{j}{2}-1}} = \frac{(it)^3}{6\sqrt{n}}\rho_3(z_0) + \frac{t^4}{4!\, n}\alpha(t), \qquad (2.33)$$

$$\rho_j(z) = \frac{K^j(z)}{[K''(z)]^{\frac{j}{2}}}, \quad |\alpha(t)| \leqslant \max_{|z|<\frac{A_2}{2}} |K^{(IV)}(z)| \frac{1}{|K''(z_0)|^2}.$$

едовательно,

$$\int\limits_{-\sqrt{\tau nK''(z_0)}}^{\sqrt{\tau nK''(z_0)}} e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left\{\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\rho_j(z_0)(it)^j}{j!\, n^{\frac{j}{2}-1}}\right\} dz = \sqrt{2\pi} + O(\tau). \qquad (2.34)$$

ее,

$$\left(P_1(z)\psi,\ \pi(z)\right) = \left(P_1(z_0)\psi,\ \pi(z_0)\right) + \beta(z)(z - z_0), \qquad (2.35)$$

$$|\beta(z)| \leqslant \max_{|z|<A_2} \left|\frac{d}{dz}\left(P(z)\psi,\ \pi(z)\right)\right|.$$

(2.29) и (2.35) следует, что

$$\int\limits_{z_0-i\sqrt{\tau}}^{z_0+i\sqrt{\tau}} \lambda^n(z)\left[\left(P_1(z)\psi,\ \pi(z)\right) - \left(P_1(z_0)\psi,\ \pi(z)\right)\right] e^{-n\sigma\tau z_0}\, dz =$$

$$= \lambda^n(z_0)\, e^{-n\sigma\tau z_0} O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (2.36)$$

ким образом,

$$I_1 = \frac{\sqrt{2\pi}ie^{n\{K(z_0)-z_0\tau\sigma\}}}{\sqrt{nK''(z_0)}} \left(P_1(z_0)\psi,\ \pi(z_0)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \qquad (2.37)$$

гласно (2.29)

$$|I_2| < \varepsilon\,|\lambda(z_0)|^n \exp\left\{-n\sigma\tau z_0 - n\frac{K''(z_0)}{4}\tau\right\} \times$$

$$\times \max_{|z|\leqslant A_2} \left|\left(P_1(z)\psi,\ \pi(z)\right)\right| + O\left(\rho_2^n e^{-n\sigma\tau z_0}\right). \qquad (2.38)$$

В силу формулы (2.4) и равномерной непрерывности $P(z)$ найдутся такие постоянные c и α, что при $n > n_0$

$$\| P^n(z) \| < e^{-n\alpha}, \tag{2.39}$$

для z, лежащих в прямоугольнике $|\mathrm{Re} z| < c$,

$$\frac{\pi}{h} + \varepsilon < \mathrm{Im} z < \frac{\pi}{h} - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|I_3| < e^{-n(\alpha + \sigma\tau z_0)}. \tag{2.4}$$

Из (2.20) следует, что

$$K(z_0) - \sigma\tau z_0 = -\frac{\tau^2}{2} + \tau^3 \mu(\tau). \tag{2.4}$$

Согласно (2.8), (2.19) и (2.35)

$$K''(z_0) = \sigma^2 + O(\tau), \qquad \left(P_1(z_0)\psi, \pi(z_0)\right) = 1 + O(\tau) \tag{2.4}$$

Из (2.30), (2.37), (2.38), (2.40), (2.41) и (2.42) вытекает утверждение теоремы.

Поступила в редакцию
18.3.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949.
[2] С. Х. Сираждинов, Уточнение предельных теорем для цепей Маркова, ДАН СССР, 84, 6 (1952), 1143—1146.
[3] С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.
[4] H. Cramér, Sur un nouveau théoréme limite de la théorie des probabilités, Actualités sci. et ind., No 736, Paris, 1938 (Русский перевод, УМН, X (1944), 166—178).
[5] В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен. II, 3 (1957), 214—229.
[6] С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен. II, 6 (1957), 389—416.
[7] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.
[8] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИИЛ, М., 1951.
[9] П. Халмош, Теория меры, ИИЛ, М., 1953.
[10] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИИЛ, М., 194
[11] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of Laplace—Gaussian law. Acta Math., 77 (1945), 1 –125.

MORE EXACT STATEMENTS OF LIMIT THEOREMS FOR HOMOGENEOUS MARKOV CHAINS

S. V. NAGAEV (TASHKENT)

(Summary)

This paper contains several theorems defining more precisely the convergence of homogeneous Markov chains with an abstract state space to the Gaussian distribution. Moreover, limit theorems for large deviations are proved. The proofs are analogous the ones in Ref. [6].

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРЕМОЙ БОХНЕРА

Ю. В. ПРОХОРОВ, В. В. САЗОНОВ

Введение. В классической теореме Бохнера утверждается, что

А. Функция $\chi(f)$, $f \in R^n$, является характеристической функцией некоторого n-мерного определения вероятностей тогда и только тогда, когда

а) $\chi(f)$ положительно определена и $\chi(0)=1$,

б) $\chi(f)$ непрерывна при $f=0$.

Известно, с другой стороны, что

Б. для слабой относительной компактности * семейства $\{P_\alpha\}$ распределений в R^n ходимо и достаточно, чтобы соответствующие характеристические функции

$$\chi_\alpha(f) = \int_{R^n} e^{i(f,x)} P_\alpha(dx)$$

ли равностепенно непрерывны при $f=0$.

Поскольку понятие характеристической функции (или характеристического функцио- а — х. ф.) может быть введено в весьма общей обстановке, естественно возникает рос о том, в какой степени утверждения А. и Б. переносятся на случай других про- анств.

В сепарабельном гильбертозом пространстве X может быть введена [1] некоторая ология $\mathcal{J}$, определяемая специальной системой вполне непрерывных квадратичных м и обладающая следующим свойством: условия

а) функционал $\chi(f)$ положительно определен и $\chi(0)=1$,

б) $\chi(f)$ непрерывен в нуле в $\mathcal{J}$-топологии,

ходимы и достаточны для того, чтобы $\chi(f)$ был х. ф. некоторого вероятностного пределения в X.

Первый факт, который мы собираемся доказать, состоит в том, что в сепарабельном бертозом пространстве X нет никакого аналога утверждения Б, т. е., что не суще- ует никакой топологии в X, в которой равностепенная непрерывность $\{\chi_\alpha\}$ в нуле бы- ы эквивалентна слабой компактности семейства $\{P_\alpha\}$ **.

Аналогичное положение имеет место и в любом пространстве X, сопряженном к пол- у сепарабельному счетно-гильбертову пространству Y, исключая тот случай, когда одная топология в Y совпадает с $\mathcal{J}$-топологией, т. е. случай, когда Y ядерно.

В ядерном же пространстве имеют место утверждения, аналогичные А (см. [3], [4]) (см. [4]), причем непрерывность $\chi(f)$, $f \in Y$, понимается в исходной топологии.

По-видимому, установленные факты допускают широкое обобщение. При определении лога $\mathcal{J}$-топологии в качестве наводящего соображения можно использовать то обсто-

---

* Всюду в дальнейшем вместо «относительная компактность» мы для краткости бу- м писать «компактность».

** Условия слабой компактности $\{P_\alpha\}$ могут быть выражены явно, но не очень прос- в терминах $\{\chi_\alpha\}$ см. [2], § 1.6.

ятельство, что в указанных выше случаях $\mathscr{J}$-топология в Y может быть определена к слабейшая линейная топология, в которой непрерывны х. ф. всех нормальных распред лений в $X = Y^*$.

Построение аналогов утверждений А и Б связано, возможно, с соотношением ме ду $\mathscr{J}$-топологией и исходной топологией (в частности, что касается пункта Б, — то их совпадением).

§ 1

Условимся, прежде всего, всюду в дальнейшем обозначать буквой χ положитель определенные функционалы, заданные на том или ином линейном пространстве, со зн чением в нуле, равным единице. Условимся также под «топологией» в линейном пр странстве понимать локально выпуклую отделимую топологию. Отметим здесь тот и вестный факт, что непрерывность χ равносильна непрерывности χ в нуле, а равностепе ная непрерывность $\{\chi_\alpha\}$ эквивалентна равностепенной непрерывности $\{\chi_\alpha\}$ в нуле *.

Пусть теперь X — сепарабельное гильбертово пространство. Назовем S-оператором X линейный симметрический неотрицательный вполне непрерывный оператор с конечны следом. Буква S всегда будет обозначать S-оператор. $\mathscr{J}$-топологией в X назовем топол гию, в которой базу окрестностей нуля образует класс множеств вида

$$U_s(0) = \{f: (Sf, f) < 1\}.$$

Известно, что функционал

$$e^{-\frac{1}{2}(Af, f)},$$

где A — линейный оператор, тогда и только тогда является х. ф. некоторого (нормал ного) распределения в X, когда A есть S-оператор (см. [6]). Отсюда вытекает, что является слабейшей топологией, в которой непрерывны х. ф.

$$e^{-\frac{1}{2}(Sf, f)}$$

всех нормальных распределений в X с нулевым средним.

Назовем топологию $\mathscr{T}$ допустимой, если непрерывность $\chi(f)$ в этой топологии нео ходима и достаточна для того, чтобы $\chi(f)$ был х. ф. некоторого распределения в X.

Топология $\mathscr{J}$ является допустимой ([4]). Кроме того, во всякой допустимой топол гии все х. ф. (1) должны быть непрерывны. Поэтому $\mathscr{J}$ является слабейшей из всех д пустимых топологий (заметим попутно, что нам неизвестны отличные от $\mathscr{J}$ допустим топологии).

Введем наряду с топологией $\mathscr{J}$ топологию $\mathscr{T}_c$ с базой окрестностей нуля, состо щей из множеств

$$V_{K,\varepsilon}(0) = \left\{f: \sup_{x \in K} (x, f)^2 < \varepsilon\right\},$$

где K — произвольный компакт в X и ε — произвольное положительное число.

Лемма 1. *Класс множеств вида*

$$W_B(0) = \{f: (Bf, f) < 1\},$$

где B — линейный симметрический неотрицательный вполне непрерывный операт в X, образуют базу окрестностей нуля в $\mathscr{T}_c$-топологии.

Доказательство того, что квадратичная форма (Bf, f) непрерывна в нуле в $\mathscr{T}_c$-т пологии, может быть проведено со ссылкой на некоторые топологические теоремы (ср. н

---

* Это вытекает, например, из неравенства $|\chi(f') - \chi(f)| \leqslant 2\sqrt{|1 - \chi(f' - f)|}$ (с 7], стр. 206).

2), но может быть несложно получено и непосредственным подсчетом. Не ограни-
общности, мы предположим, что собственные числа оператора B все положитель-
занумерованы так, что

$$\mu_{n+1} \leqslant \mu_n,$$

$\mu_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, и, кроме того, удовлетворяют соотношению

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

Пусть $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов B, $x_n = (x, e_n)$.
еделим компакт

$$K = \left\{ x: \sum_{j=n}^{\infty} x_j^2 \leqslant \sqrt{\mu_n},\ n=1, 2, \ldots \right\}$$

зьмем $\mathcal{T}_c$-окрестность $V_{K,1}(0)$.

Выберем подпоследовательность $\{n_k\}$ целых чисел ($n_1 = 1$) таким образом, чтобы

$$\frac{\mu_{n_k}}{\mu_{n_k-1}} \to \frac{1}{2} \text{ при } k \to \infty.$$

Пусть f — произвольный элемент из $V_{K,1}(0)$. Множество C_k тех x, у которых коор-
аты с номерами от n_k до $n_{k+1}-1$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} x_j^2 \leqslant \sqrt{\mu_{n_{k+1}-1}},$$

се остальные координаты равны нулю, входит, очевидно, в K. Поэтому при всех x ,
$\leqslant j < n_{k+1}$, удовлетворяющих (2), должно выполняться неравенство

$$\left| f_{n_k} \right| \left| x_{n_k} \right| + \ldots + \left| f_{n_{k+1}-1} \right| \left| x_{n_{k+1}-1} \right| < 1,$$

юда вытекает, что

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} f_j^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu_{n_{k+1}-1}}}.$$

едовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j f_j^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n_k} \frac{1}{\sqrt{\mu_{n_{k+1}-1}}} < \infty.$$

ким образом, квадратичная форма (Bf, f) ограничена на $V_{K,1}(0)$, а потому непрерывна
$\mathcal{T}_c$-топологии.

Обратно, пусть $V_{L,1}(0)$ — окрестность нуля в топологии $\mathcal{T}_c$. Так как L — компакт,
можем выбрать последовательность $\{\lambda_k\}$ положительных чисел, стремящуюся к нулю
кую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\lambda_k} < 1$$

для всех $x \in L$. Из неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k^2\right)$$

следует, что если $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k^2 < 1$, то $f \in V_{L,1}(0)$. Лемма доказана.

Следствие. *Топология $\mathcal{T}_c$ строго сильнее топологии $\mathcal{T}$.*

Действительно, пусть $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}$. Тогда положительно определенный функционал

$$e^{-\frac{1}{2}(Tf,\, f)},$$

где T — линейный симметрический неотрицательный вполне непрерывный оператор с бесконечным следом, будет непрерывным в J-топологии. Поэтому этот функционал является х. ф; но тогда след T должен быть конечен, что противоречит допущению.

Лемма 2. *Среди всех топологий $\mathcal{T}$, в которых слабая компактность $\{P_\alpha\}$ влечет равностепенную $\mathcal{T}$-непрерывность $\{\chi_\alpha\}$, топология $\mathcal{T}_c$ является слабейшей.*

Доказательство. 1°. Пусть дано слабо компактное семейство $\{P_\alpha\}$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Выберем компакт K так (см. [2], § 1.5), чтобы

$$\sup_{\alpha}(1 - P_\alpha(K)) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Тогда для $f \in V_{K,\frac{\varepsilon}{2}}(0)$

$$|1 - \chi_\alpha(f)| \leqslant 2(1 - \operatorname{Re}\chi_\alpha(f)) \leqslant 2\int_K (1 - \cos(f, x))\, dP_\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sup_{x \in K}(f, x)^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, компактность $\{P_\alpha\}$ влечет равностепенную $\mathcal{T}_c$-непрерывность $\{\chi_\alpha\}$.

2°. Пусть $\mathcal{T}$ — какая-либо из топологий, о которых идет речь в формулировке леммы 2 и $V_{K,\varepsilon}(0)\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi^2}{4}\right)$ — произвольная $\mathcal{T}_c$-окрестность нуля. Пусть, далее, P_x — распределение вероятностей, при котором в точках x и $-x$ сосредоточены массы, равные $\frac{1}{2}$ каждая. Семейство $\{P_x\}$, $x \in K$, слабо компактно (см. [2]). Поэтому существует такая выпуклая $\mathcal{T}$-окрестность нуля W, что для $f \in W$

$$\sup_{x \in K}(1 - \cos(x, f)) < 1 - \cos\sqrt{\varepsilon}. \tag{3}$$

Для $f \in W$ неравенство (3) равносильно неравенству

$$\sup_{x \in K}(x, f)^2 < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$W \subset V_{K,\varepsilon}(0).$$

Таким образом $\mathcal{T}_c \subseteq \mathcal{T}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Из равностепенной непрерывности $\{\chi_\alpha\}$ в $\mathcal{T}_c$-топологии не вытекает слабой компактности $\{P_\alpha\}$.*

Доказательство. Пусть T — линейный симметрический неотрицательный вполне непрерывный оператор с бесконечным следом; $\{e_j\}$ — полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов T, λ_j — собственное число, соответствующее e_j

$= (f, e_j)$. Положим

$$T_n f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j e_j, \quad \chi_n(f) = e^{-\frac{1}{2}(T_n f, f)}.$$

Применяя лемму 1, нетрудно установить, что семейство $\{\chi_n(f)\}$ равностепенно $\mathcal{T}_c$-прерывно. В то же время, как легко видеть, множество $\{P_n\}$ соответствующих распре-ёний в X некомпактно.

Теорема 1. *Не существует топологии в X такой, что равностепенная непрерыв-ть $\{\chi_\alpha\}$ в этой топологии эквивалентна слабой компактности $\{P_\alpha\}$.*

Доказательство. Допустим противное, т.е., что такая топология $\mathcal{T}$ существует.

1°. Так как из компактности $\{P_\alpha\}$ вытекает равностепенная $\mathcal{T}$-непрерывность $\{\chi_\alpha\}$, по лемме 2, $\mathcal{T}_c \subseteq \mathcal{T}$.

2°. Так как равностепенная непрерывность $\{\chi_\alpha\}$ в топологии $\mathcal{T}$ влечет компактность }, то это же должно быть верно и в топологии $\mathcal{T}_c$. Последнее же, в силу леммы 3, озможно. Теорема доказана.

§ 2

Определение 1. Действительное линейное топологическое пространство E назы-ется *счетно-гильбертовым*, если в нем существует счетная система скалярных произ-дений $(x, y)_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что класс множеств вида $\{x: (x, x)_n < \varepsilon\}, \varepsilon < 0$, = 1, 2, . . . образует базу окрестностей нуля.

Будем считать (это не ограничивает общности), что $(x, x)_n \leq (x, x)_{n+1}$ для всех $x \in E$ $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть E_n^s — пополнение E по n-ому скалярному произведению, A_{mn} — линейное не-рывное отображение E_m в E_n, оставляющее неподвижными точки из E $(m > n)$ и $_m$ — линейный симметрический неотрицательный оператор в E_m, определяемый соотно-ением

$$(A_{mn}x, A_{mn}y)_n = (B_{nm}, x, y)_m, \quad x, y \in E_m.$$

Определение 2. Сепарабельное счетно-гильбертово пространство E называется *ерным*, если для любого n найдется $m > n$ такое, что оператор B_{nm} есть S оператор E_m.

Пусть теперь E — полное сепарабельное счетно-гильбертово пространство, E' — со-яженное пространство, σ — слабая топология в E' и $\mathcal{T}_c^*$ — топология в E' равномерной одимости на компактах.

В пространстве E' минимальная σ-алгебра $\mathfrak{L}$, относительно которой измеримы все ункции вида $x(f) = \langle f, x \rangle$, $f \in E'$, $x \in E$, совпадает с классом $\mathfrak{B}_\sigma$ борелевских под-ножеств E' относительно слабой топологии ([4]). Заметим теперь, что класс $\mathfrak{B}_\sigma$ совпа-ет с σ-алгеброй $\mathfrak{B}_{\mathcal{T}_c}$ борелевских подмножеств E' относительно топологии $\mathcal{T}_c$.

Это является следствием следующих двух фактов: а) E' есть объединение счетного исла слабых компактов (напомним, что множество $\{f : \|f\|_n \leq k, f \in E'\}$ слабо компактно; ., например, [8] стр. 264), б) всякое $\mathcal{T}_c$-замкнутое множество в пересечении со слабым омпактом дает слабо замкнутое множество ([8] гл. IV § 2, особенно стр. 223). Из б) ледует также, что всякий слабый компакт компактен в топологии $\mathcal{T}_c$.

Множество вероятностных мер $\mathcal{P}$ на σ-алгебре $\mathfrak{L} = \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{B}_{\mathcal{T}_c}$ мы идентифицируем с оответствующим подмножеством множества $\mathfrak{M}$ линейных непрерывных функционалов на анаховском пространстве ограниченных, непрерывных в топологии $\mathcal{T}_c$ функций: мере $\in \mathcal{P}$ соответствует функционал

$$P(g) = \int g(f)\, P(df).$$

Слабую топологию w на $\mathcal{P}$ определим как топологию, индуцированную слабой топологией на $\mathfrak{M}$. Пусть $T_{n,R} = \{f : \|f\|_n \leqslant R,\ f \in E\}$.

Лемма 4. *Для того чтобы семейство мер $\{P_\alpha\}$ было последовательностно компактно, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись бы такие n и R, что*

$$P_\alpha(E' \setminus T_{n,R}) < \varepsilon \qquad (4)$$

для всех α.

Доказательство. Достаточность этого условия следует из теоремы 6 [9], так как 1) топологии, индуцированные на слабых компактах топологиями $\mathcal{T}_c$ и σ совпадают (см. выше б)), 2) слабые компакты с топологией, индуцированной на них топологией σ, метризуемы ([8] гл. IV § 2 п. 2).

Для доказательства необходимости заметим сначала, что E' с топологией $\mathcal{T}_c$ есть хемикомпактное k-пространство. Это нетрудно показать, пользуясь результатами § 2 гл. IV [8].

Предположим, что существует последовательностно компактное семейство, для которого (4) не выполняется. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любого n существует α_n такое, что

$$P_{\alpha_n}(E' \setminus T_{n,n}) \geqslant \varepsilon_0. \qquad (5)$$

Возьмем сходящуюся подпоследовательность $\{P_{\alpha_n'}\}$. Согласно теореме 2 [9] семейство $\{P_{\alpha_n'}\}$ должно быть плотным, что противоречит (5). Лемма доказана.

Лемма 5. *Исходная топология в E является слабейшей топологией, в которой последовательностная компактность семейства распределений влечет равностепенную непрерывность соответствующего семейства х. ф.*

Доказательство использует лемму 4 и вполне аналогично доказательству леммы 2. Мы его опускаем.

Теорема 2. *Если существует топология $\mathcal{T}$ в E такая, что равностепенная непрерывность в ней х. ф. равносильна последовательностной компактности в топологии σ соответствующих распределений, то пространство E ядерно.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\chi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}(x,x)_n}$$

Пусть $\{e_k\}$ — полный ортонормированный базис в E_n, состоящий из векторов E и $\{A_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, — последовательность операторов в E_n, определяемых равенствами

$$A_k e_l = \begin{cases} e_l, & 1 \leqslant l \leqslant k, \\ 0, & l > k. \end{cases}$$

Функционалы

$$e^{-\frac{1}{2}(A_k x, x)_n}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

суть х. ф. ([4]). Очевидно, они равностепенно непрерывны в E в исходной топологии, а следовательно, по лемме 5, и в топологии $\mathcal{T}$. Отсюда вытекает, что функционал $\chi_n(x)$ есть х. ф. Согласно [4] существуют $m > n$ и S-оператор S в E_m (без ограничения общности считаем, что $Sx \neq 0$ при $x \neq 0$) такие, что если $(Sx, x)_m < 1$, то $1 - \chi_n(x) < \varepsilon$ и, следовательно, $(x, x)_n \leqslant \varepsilon_1 (Sx, x)_m$, $x \in E$. Если $\{h_k\}$ — полный ортонормированный базис в E_m, состоящий из векторов E, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_{n,m} h_k, h_k)_m = \sum_{k=1}^{\infty} (h_k, h_k)_n \leqslant \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{\infty} (Sh_k, h_k)_m < \infty.$$

Таким образом, B_{nm} имеет конечный след. Теорема доказана.

Поступила в редакцию
25.10.60

ЛИТЕРАТУРА

В. В. Сазонов, Замечание о характеристических функционалах, Теория вероят. и ее примен., **III**, 2 (1958), 201—205.

Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **I**, 2 (1956), 177—238.

Р. А. Минлос, Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, Труды Моск. Матем. О-ва, 8 (1959), 497—518.

В. В. Сазонов, О характеристических функционалах, Труды VI совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс — Паланга, 1960.

А. Н. Колмогоров, Замечание о работах Р. А. Минлоса и В. Сазонова, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2 (1959), 237—239.

E. Mourier, Eléments aléatoires dans un espace de Banach, These, Paris, 1954.

M. Loève, Probability Theory, 2-nd ed., Van Nostrand, 1960.

Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.

Le Cam, Convergence in distribution of stochastic processes, Univ. of California publ. stat., vol. 2, no. 11, 207—236. (Есть русский перевод, Математика, 4 : 3 (1960), 107—142).

SOME RESULTS ASSOCIATED WITH BOCHNER'S THEOREM

Yu. V. PROHOROV, V. V. SAZONOV *(MOSCOW)*

(Summary)

Let $\{P_\alpha\}$ be a family of probability distributions in a separable Hilbert space (or re generally, in a space $X = Y^*$ conjugate to countably-Hilbert space Y) and let } be the family of corresponding characteristic functionals. We investigate whether or there exists a locally convex topology $\mathcal{T}$ with the following property:

The relative compactness of $\{P_\alpha\}$ is equivalent to uniform (with respect to α) conti-ty of $\{\chi_\alpha\}$.

We prove that there is no such topology except for the case of countably-Hilber clear space Y.

О ДИСПЕРСИИ ВРЕМЕННЫХ СРЕДНИХ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В. П. ЛЕОНОВ

Пусть $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с дискретным или непрерывным временем. Известны различные теоремы (см. [1,2]), утверждающие при некоторых условиях асимптотическую нормальность при $p \to \infty$ случайных величин ζ_p, где

$$\zeta_p = \sum_{t=0}^{p-1} \xi(t) \text{ в случае дискретного времени,}$$

и

$$\zeta_p = \int_0^p \xi(t)\, dt \text{ в случае непрерывного времени.}$$

дним из этих условий является рост величины $b_p = \mathbf{D}\zeta_p = \mathbf{M}\,|\,\zeta_p\,|^2$ при $p \to \infty$. Анзу этого условия посвящена настоящая работа *.

* См. также [9].

1. Рассмотрим стационарный в широком смысле комплексный процесс $\xi(n)$ с дискретным временем. Пусть $\mathbf{M}\xi(n) = 0$, $B(m)$ —корреляционная функция, $F(\lambda)$ — спектральная функция и H_ξ — линейное замыкание (в среднем квадратичном) случайных величин $\xi(n)$, $0 \leqslant n < \infty$.

Теорема 1*. *Если $B(m) \to 0$ при $m \to \infty$, то существует предел $\lim b_p = b$ $p \to \infty$, причем $b < \infty$, если существует стационарный в широком смысле процесс $\eta(n)$ с дискретным временем такой, что*

$$\xi(n) = \eta(n+1) - \eta(n). \tag{1}$$

С другой стороны, если $b < \infty$, то существует стационарный в широком смысле процесс с дискретным временем $\eta(n) \in H_\xi$ $(n \geqslant 0)$, удовлетворяющий (1), при этом $b = 2\mathbf{D}\eta(n)$.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если $B(m) \to 0$ при $m \to \infty$, то*

$$\lim_{p\to\infty} b_p = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dF(\lambda)}{|e^{i\lambda} - 1|^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dF(\lambda)}{2\sin^2\frac{\lambda}{2}}.$$

Так как равенство $U\xi(n) = \xi(n+1)$ определяет на H_ξ изометрический оператор U, то теорема 1 без труда получается из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть H — гильбертово пространство, U — изометрический оператор в H, $g \in H$, H_g — линейное замыкание в H элементов $U^n g$, $0 \leqslant n \leqslant \infty$ и*

$$(U^n g,\ g) \to 0 \qquad (n \to \infty), \tag{2}$$

тогда существует предел

$$\lim_{p\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{p-1} U^n g \right\|^2 = b(g),$$

причем для соотношения $b(g) < \infty$ достаточно, чтобы существовал $h \in H$ такой, что

$$g = Uh - h, \tag{3}$$

и необходимо чтобы существовал $h \in H_g$, удовлетворяющий (3), при этом $b(g) = 2\|h\|^2$.

Доказательство леммы 1. Пусть

$$\zeta_p = \sum_{n=0}^{p-1} U^n g$$

и $\|\zeta_p\|^2$ не стремится к бесконечности при $p \to \infty$. Тогда существует последовательность p_k такая, что $p_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $\|\zeta_{p_k}\| \leqslant c < \infty$ для всех k. Так как сфера H_g слабо компактна, то существует подпоследовательность (мы снова обозначим ее p_k) такая, что ζ_{p_k} слабо сходится к элементу $-h \in H_g$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} (\zeta_{p_k},\ h_1) = -(h,\ h_1)$$

для всех $h_1 \in H_g$. Легко проверить, что отсюда вытекает равенство

$$\lim_{k\to\infty} (U\zeta_{p_k},\ h_1) = -(Uh,\ h$$

---

* При доказательстве этой теоремы были приняты во внимание некоторые идеи И. А. Ибрагимова, высказанные им автору.

овательно,

$$((Uh - h), h_1) = \lim_{k\to\infty}((\zeta_{p_k} - U\zeta_{p_k}), h_1) = (g, h_1) - \lim_{k\to\infty}(U^{p_k} g, h_1).$$

в силу (2) $(U^n g_1, g_2) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $g_1, g_2 \in H_g$, поэтому

$$((Uh - h), h_1) = (g, h_1)$$

всех $h_1 \in H_g$, т. е. $g = Uh - h$. Таким образом, если $\|\zeta_p\|^2$ не стремится к бесчности при $p \to \infty$, то существует $h \in H_g$, удовлетворяющий (3).

Пусть теперь существует $h \in H$, удовлетворяющий (3). Тогда

$$\|\zeta_p\|^2 = \|U^p h - h\|^2 \leq 4\|h\|^2.$$

торив предыдущие рассуждения, получаем, что существует $h' \in H_g$ такой, что $Uh' = h'$ и, следовательно, при $p \to \infty$

$$\|\zeta_p\|^2 - \|U^p h' - h'\|^2 = \|U^p h'\|^2 - (U^p h', h') - (h', U^p h') + \|h'\|^2 \to 2\|h'\|^2.$$

ма 1 доказана.

Замечание 1. Если не предполагать, что $B(m) \to 0$ при $m \to \infty$, то справедлишь следующее соотношение:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} b_p = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dF(\lambda)}{2\sin^2\frac{\lambda}{2}}. \tag{4}$$

азательство соотношения (4) в случае, когда интеграл в правой части (4) сходится, ержится в [9]; в случае расходимости интеграла (4) это доказательство достаточно олнить ссылкой на лемму Фату.

2. Рассмотрим теперь стационарный в широком смысле процесс $\xi(t)$ с непрерывным менем. Пусть $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, $B(\tau)$—корреляционная функция, $F(\lambda)$ — спектральная функи $H_\xi(H'_\xi)$ — линейное замыкание случайных величин $\xi(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, $(-\infty < < \infty)$.

Теорема 2. *Если $B(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то существует предел $\lim b_p = b$ $(p \to \infty)$, чем $b < \infty$, если существует стационарный в широком смысле процесс $\eta(t)$ такой,*

$$\xi(t) = \frac{d\eta}{dt} \text{ (в среднем квадратичном).} \tag{5}$$

ругой стороны, если $b < \infty$, то существует стационарный в широком смысле про- $\eta(t) \in H_\xi$ $(t \geqslant 0)$, удовлетворяющий (5), при этом $b = 2D\eta(t)$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Если $B(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то*

$$\lim_{p\to\infty} b_p = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Так как равенство $U^t\xi(s) = \xi(s+t)$ определяет на H'_ξ непрерывную группу унных операторов U^t, то теорема 2 без труда получается из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть H — гильбертово пространство, U^t — непрерывная однопараметческая группа унитарных операторов в H, A — ее бесконечно малый производящий ратор* с областью определения D_A, $g \in H$, H_g — линейное замыкание в H элемен- $U^t g$, $0 \leq t < \infty$ и*

$$(U^t g, g) \to 0 \quad (t \to \infty) \tag{6}$$

* См. [6] стр. 426.

тогда существует предел

$$\lim_{p\to m}\left\|\int_0^p U^t g\,dt\right\|^2 = b(g),$$

причем, для соотношения $b(g) < \infty$ *достаточно, чтобы существовал* $h \in D_A$ *такой что*

$$g = Ah,$$

и необходимо чтобы существовал $h \in D_A \cap H_g$, *удовлетворяющий* (7), *при этом* $b(g) = 2\|h\|^2$.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$\zeta_p = \int_0^p U^t g\,dt.$$

Если $\|\zeta_p\|$ не стремится к бесконечности при $p\to\infty$, то и в случае, описанном лемой 1, существует последовательность p_l такая, что $p_l\to\infty$ при $l\to\infty$ и ζ_{p_l} слабо сходится к элементу $-h\in H_g$, т. е. для любого $h_1\in H_g$ при $l\to\infty$

$$(\zeta_{p_l}, h_1)\to -(h, h_1).$$

Покажем теперь, что $h\in D_A$ и $Ah = g$, т. е.

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\|\frac{U^\Delta h - h}{\Delta} - g\right\|^2 = 0.$$

Зафиксируем некоторое Δ. Из (8) вытекает, что при $l\to\infty$

$$(U^\Delta\zeta_{p_l}, h_1)\to -(U^\Delta h, h_1)$$

и, следовательно, для любого $h_1\in H_g$ имеем

$$\left(\frac{U^\Delta h - h}{\Delta}, h_1\right) = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{\zeta_{p_l} - U^\Delta\zeta_{p_l}}{\Delta}, h_1\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta U^t g\,dt, h_1\right) - \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{\Delta}\int_{p_l}^{p_l+\Delta} U^t g\,dt, h_1\right).$$

Из (6) вытекает, что $(U^t g_1, g_2)\to 0$ при $t\to\infty$ для всех $g_1, g_2\in H_g$, поэтому при $l\to\infty$

$$\left|\left(\frac{1}{\Delta}\int_{p_l}^{p_l+\Delta} U^t g\,dt, h_1\right)\right| = \left|\frac{1}{\Delta}\int_{p_l}^{p_l+\Delta}(U^t g, h_1)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\geqslant p_l}|(U^t g, h_1)|\to 0,$$

и, следовательно, для любого $h_1\in H_g$

$$\left(\frac{U^\Delta h - h}{\Delta}, h_1\right) = \left(\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta U^t g\,dt, h_1\right).$$

Поэтому при любом Δ

$$\frac{U^\Delta h - h}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta U^t g\,dt,$$

как $(U^t g, g)$ непрерывна по t, а $(U^t g, U^s g)$ непрерывна по совокупности перемен-
$s, t)$, то при $\Delta \to 0$

$$\left\| \frac{U^{\Delta} h - h}{\Delta} - g \right\|^2 = \left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} U^t g \, dt - g \right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \int_0^{\Delta} \int_0^{\Delta} (U^t g, U^s g) \, dt \, ds + \| g \|^2 - \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} (U^t g, g) \, dt - \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \overline{(U^t g, g)} \, dt \to 0.$$

м образом, если $\| \zeta_p \|$ не стремится к бесконечности при $p \to \infty$, то существует
$D_A \cap H_g$, удовлетворяющий (7).

Пусть теперь существует $h \in D_A$, удовлетворяющий (7). Тогда

$$\| \zeta_p \|^2 = \left\| \int_0^p U^t g \, dt \right\|^2 = \| U^p h - h \|^2 \leq 4 \| h \|^2.$$

Повторив предыдущие рассуждения, получаем, что существует $h' \in D_A \setminus H_g$ такой,
$g = Ah'$, поэтому, как и в доказательстве леммы 1,

$$\| \zeta_{p_n} \|^2 \to 2 \| h' \|^2 \quad (p \to \infty).$$

ма 2 доказана.

Замечание 2. Если не предполагать, что $B(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то справедливо
ь следующее соотношение

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_p \, dp = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{9}$$

зательство которого аналогично доказательству соотношения (4).

3. Если $B(\tau)$ при $\tau \to \infty$ стремится к нулю не слишком медленно, то для соответ-
ующего процесса $\xi(t)$ величина b_p если и растет, то обязательно линейно.

Теорема 3. *Пусть $\xi(t)$ — стационарный в широком смысле процесс с дискретным*
рерывным) временем, причем $\mathbf{M}\xi(t) = 0$ и корреляционная функция этого процесса
такова, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} | mB(m) | < \infty \tag{10}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} | \tau B(\tau) | \, d\tau < \infty \right). \tag{10'}$$

а

$$b_p = p \sum_{m=-\infty}^{\infty} B(m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} | m | B(m) + o(1) \tag{11}$$

$$\left(b_p = p \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} | \tau | \, B(\tau) \, d\tau + o(1) \right). \tag{11'}$$

Докажем теорему 3 для дискретного времени. В случае непрерывного времени вы-
ки аналогичны. Имеем:

$$b_p = \mathbf{D}\zeta_p = \mathbf{M} \left| \sum_{n=0}^{p-1} \xi(n) \right|^2 = \sum_{m, n=0}^{p-1} B(m - n) =$$

$$= pB(0) + \sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=0}^{m-1} B(m-n) + \sum_{n=1}^{p-1}\sum_{m=0}^{n-1} \overline{B(n-m)} =$$

$$= pB(0) + \sum_{m=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{m} B(k) + \sum_{n=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{n} \overline{B(k)} = pB(0) + 2\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} B(k).$$

Отсюда получаем:

$$b_p - p\sum_{k=-\infty}^{\infty} B(k) = 2\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} B(k) - 2p\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} B(k) =$$

$$= -2\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{k=m+1}^{\infty} \operatorname{Re} B(k) = -2\min(p, k)\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} B(k).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|\operatorname{Re} B(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k\,|B(k)| < \infty \text{ и } k \geqslant \min(p, k) \to k, \text{ при } p \to \infty,$$

то

$$b_p - p\sum_{k=-\infty}^{\infty} B(k) \to -2\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Re} B(k) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\,B(k) \quad (p \to \infty).$$

Теорема 3 доказана.

Очевидно, что при условии (10) или (10′) спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $\xi($ существует и непрерывна. Выразим b_p через $f(\lambda)$ при $p \to \infty$.

Замечание 3. При условии (10) или (10′) существует несобственный интегра Римана

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda) + f(-\lambda) - 2f(0)}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) + f(-\lambda) - 2f(0)}{\lambda^2}\,d\lambda\right),$$

поэтому формулу (11) или (11′) можно переписать в виде

$$b_p = 2\pi f(0)\,p + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda) + f(-\lambda) - 2f(0)}{4\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,d\lambda + o(1) \tag{12}$$

$$\left(b_p = 2\pi f(0)\,p + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) + f(-\lambda) - 2f(0)}{\lambda^2}\,d\lambda + o(1)\right). \tag{12′}$$

Вывод формул (12) ((12′)) из (11) ((11′)) элементарен, но громоздок и потому опуще

Некоторые дополнительные сведения о поведении b_p при $p \to \infty$ указаны в [7].

4. Сформулируем теперь полученные результаты в терминах эндоморфизмов измер мого пространства ([4] стр. 329—330) и измеримых потоков ([5] стр. 107). Пусть $(X, \mathfrak{B}$ — измеримое пространство (см. [3]), μ — неотрицательная мера на нем, $\mu(X) = 1$, $L^2($ —гильбертово пространство комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля X, (g_1, g_2) — скалярное произведение элементов $g_1, g_2 \in L^2(X)$, $m_g = (g, 1)$, T — энд морфизм пространства X, U — сопряженный ему изометрический оператор в $L^2(X)$ ([стр. 330). Для $g \in L^2(X)$ обозначим через H_g линейное замыкание в $L^2(X)$ элемент $U^n(g) - m_g$, $0 \leqslant n < \infty$.

Рассмотрим функцию

$$\zeta_p(x) = \sum_{n=0}^{p-1} U^n g(x), \quad g(x) \in L^2(X),$$

усть

$$b_p(g) = \| \zeta_p - m_g p \|^2 = \int_X | \zeta_p(x) - m_g p |^2 \mu(dx).$$

леммы 1 вытекает

Следствие 3. *Если эндоморфизм T есть перемешивание *, то для любой $g(x) \in L^2(X)$ ествует предел*

$$\lim_{p \to \infty} b_p(g) = b(g),$$

ием $b(g) < \infty$, если существует функция $h(x) \in L^2(X)$ такая, что

$$g = m_g - Uh - h. \tag{13}$$

ругой стороны, если $b(g) < \infty$, то существует $h(x) \in H_g$, удовлетворяющая (13) *этом $b(g) = 2 \| h \|^2$.*

Замечание 4. Если функция $g(x) \in L^2(X)$ вещественна, то $h(x) \in H_g$, удовлетворяющая (13) (если она существует), также вещественна.

Рассмотрим теперь измеримый поток S_t в X (см. [5] стр. 107). Пусть U^t — соотвующая ему непрерывная группа унитарных операторов ([5] стр. 110), A — ее бесечно малый производящий оператор с областью определения D_A (см. [6] стр. 426), -линейное замыкание элементов $U^t g - m_g$, $0 \leqslant t < \infty$, $g \in L^2(X)$. Рассмотрим функ-

$$\zeta_p(x) = \int_0^p U^t g(x)\, dt,$$

$g(x) \in L^2(X)$, и пусть $b_p(g) = \| \zeta_p - m_g p \|^2$. Из леммы 2 вытекает

Следствие 4. *Если измеримый поток S_t есть перемешивание **, то для любой $) \in L^2(X)$ существует предел*

$$\lim_{p \to \infty} b_p(g) = b(g)$$

ием $b(g) < \infty$, если существует функция $h(x) \in D_A$ такая, что

$$g = m_g + Ah. \tag{14}$$

ругой стороны, если $b(g) < \infty$, то существует $h(x) \in D_A \cap H_g$, удовлетворяющая , при этом $b(g) = 2 \| h \|^2$.

5. В этом пункте, примыкающем к п. 4, мы рассмотрим поведение $b_p(g)$ для ге-чатых функций $g(x)$. Будем называть вещественную функцию $g(x) \in L^2(X)$ (ρ, d)-ге-чатой, если для почти всех $x \in X$

$$g(x) = \rho + k(x)\, d, \tag{15}$$

$k(x)$ — целочисленная функция.

Теорема 4. *Если эндоморфизм T есть перемешивание, $g(x)$ — (ρ, d)-гепетчатая кция и $m_g \neq \rho + kd$ ни при каком целом k, то $b_p(g) \to \infty$ при $p \to \infty$.*

Из теорем 3 и 4 вытекает

* См. [5] стр. 96, формула (3).

** См. [5] стр. 116.

Следствие 5. *Если эндоморфизм T есть перемешивание и $g(x)$ — характерист ческая функция множества $A \in \mathfrak{B}$ такого, что $0 < \mu(A) < 1$, то $b_p(g) \to \infty$ п $p \to \infty$ *; если, кроме того,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \mu(T^{-n}A \cap A) - (\mu(A))^2 \right| < \infty,$$

то $b_p(g)$ растет линейно.

Доказательство теоремы 4. Не ограничивая общности, можно считат что $d = 1$, $m_g = 0$ и, следовательно, $0 < \rho < 1$. Покажем, что если $g(x) - (\rho, 1)$-реше чатая функция $(0 < \rho < 1)$ и существует функция $h(x) \in L^2(X)$ такая, что

$$g(x) = h(T_x) - h(x), \qquad (\text{5})$$

то эндоморфизм T не может быть перемешиванием. В силу следствия 3 из этого утв ждения вытекает теорема 4. Согласно замечанию 4 можно считать, что $h(x)$, удовлетв ряющая (16), вещественна.

Лемма 3. *Существует вещественная непрерывная функция $\psi(y)$ вещественной п ременной y, периодическая с периодом единица и такая, что $\psi(h(x))$ не является по ти всюду постоянной.*

Доказательство леммы 3. Легко убедиться, что если для всякой непрерывн вещественной функции $\psi(y)$ с периодом единица $\psi(h(x))$ почти всюду равна постоянно то $h(x) - (\rho', 1)$-решетчатая функция.

Отсюда вытекает, что и $h(Tx)$ тоже $(\rho', 1)$-решетчатая функция. Следовательно, с гласно (16) $g(x) - (0,1)$-решетчатая функция, что противоречит условию $0 < \rho < 1$. Ле ма 3 доказана.

Пусть теперь $\psi(y)$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в лемме 3, $f(x) = \psi(h(x))$. Из (15) и (16) получаем:

$$Uf(x) = f(Tx) = \psi(h(Tx)) = \psi(h(x) + g(x)) = \psi(h(x) + \rho + k(x)) = \psi(h(x) + \rho).$$

Аналогично,

$$U^n f(x) = \psi(h(x) + n\rho) = \psi(h(x) + n\rho + m), \qquad (\text{6})$$

где m — произвольное целое число. Как известно, (см. [8]) для любого вещественно числа ρ существует последовательность пар целых чисел (n_k, m_k) такая, что $n_k \to \infty$ $n_k\rho + m_k \to 0$ при $k \to \infty$. Выбрав такую последовательность пар и используя непреры ность $\psi(y)$, формулу (17) и теорему о переходе к пределу под знаком интеграла Лебе при $k \to \infty$ имеем

$$(U^{n_k} f, f) = \int_X \psi(h(x) + n_k\rho + m_k)\,\psi(h(x))\,\mu(dx) \to \int_X [\psi(h(x))]^2\,\mu(dx) = \|f\|^2.$$

В то же время, если предположить, что эндоморфизм T есть перемешивание, то п $k \to \infty$

$$(U^{n_k} f, f) \to |(f, 1)|^2.$$

Так как $f(x)$ не есть почти всюду постоянная, то $\|f\|^2 = \|f\|^2 \cdot \|1\|^2 > |(f, 1)$ следовательно, T не есть перемешивание. Теорема 4 доказана.

Поступила в редакцию
21.6.60

---

* Это утверждение в качестве гипотезы было высказано Я. Г. Синаем; Ю. К. Бел евым построен пример, показывающий, что для потоков аналогичное утверждение не име места (работа Ю. К. Беляева публикуется в этом же выпуске журнала).

ЛИТЕРАТУРА

В. А. Волконский и Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций, Теория вероят. и ее примен. IV, 2 (1959), 186—207.

А. И. Ибрагимов, Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов, ДАН СССР, **125**, 4 (1959), 711—714.

П. Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953.

В. А. Рохлин, Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп, Изв. АН СССР, сер. матем, **13**, 4 (1949), 329—340.

Б. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, **4**, 2, (1949), 57—128.

Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.

В. П. Леонов, Применение характеристического функционала и семи инвариантов к эргодической теории стационарных процессов, ДАН СССР, **133**, 3 (1960), 523—526.

И. М. Виноградов, Основы теории чисел, М.—Л., ГТТИ, 1952.

E. A. Robinson, Sums of Stationary random variables, Proceedings of the American Math. Soc., **11**, 1 (1960), 77—79.

ON THE DISPERSION OF TIME-DEPENDENT MEANS OF A STATIONARY STOCHASTIC PROCESS

V. P. LEONOV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

Let $\xi(t)$ be a stationary process in the wide sense with discrete (continuous) time $\mathbf{M}\xi(t) = 0$

$$\zeta_p = \sum_{t=0}^{p-1} \xi(t) \qquad \left(\zeta_p = \int_0^p \xi(t)\,dt\right),$$

$$b_p = \mathbf{M}\,|\zeta_p|^2.$$

The behaviour of b_p for $p \to \infty$ is dealt with in the paper.

ОДИН ПРИМЕР ПРОЦЕССА С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

Ю. К. БЕЛЯЕВ

Для стационарных случайных последовательностей $\xi(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ П. Леоновым [1] (см. в этом же номере журнала стр. 100) была доказана теорема, утверждающая, в частности, что для последовательностей с перемешиванием, принимающих два значения, дисперсия суммы $\zeta_p = \sum_{t=0}^{p-1} \xi(t)$ неограниченно возрастает, когда $p \to \infty$. В случае непрерывного времени положение меняется. Ниже строится пример стационарного случайного процесса $\xi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, с перемешиванием, принимающего два

значения и такого, что дисперсия интеграла $\int_0^p \xi(t)\,dt$ ограничена при $p \to \infty$. С точ

зрения измеримых потоков (см. [2] стр. 107) это означает, что существуют та измеримые потоки с перемешиванием, что для некоторых измеримых множеств диспер времени, проведенного потоком в этом множестве, не возрастает.

Рассмотрим марковский процесс, фазовое пространство которого состоит из дв интервалов $I_1 = [-1, +1)$ и $I_2 = (-1, +1]$. Положим $\eta(t) = (x, i)$, если в момент процесс находится в точке $x \in I_i$ $(i = 1, 2)$. Эволюция этого процесса определяет следующим образом. Если в момент t процесс находится в точке $(x, 1)$, то с вероя ностью $1 - \Delta t + o(\Delta t)$ за время $(t, t + \Delta t)$ процесс переходит в состояние $(x + \Delta t$, и с вероятностью $\Delta t + o(\Delta t)$ перескакивает в точку $(x, 2)$. Если же в момент t $\eta(t) = (x$, то с вероятностью $1 - \Delta t + o(\Delta t)$ $\eta(t + \Delta t) = (x - \Delta t, 2)$ и с вероятностью $\Delta t + o($ происходит скачок в точку $(x, 1)$. При движении по интервалу I_1 (I_2) в момент дос жения верхней (нижней) границы интервала происходит переход в точку $(+1$, $(-1, 1))$.

Можно показать, что при этих предположениях выполнены условия, обеспечива щие существование эргодического распределения [3], стр. 107. Здесь в качест множества C следует взять все фазовое пространство, а в качестве меры R — равном ное распределение, имеющее плотность $r(x, i) = 1/4$. Если эргодическое распределен взять в качестве начального распределения для $\eta(t)$, то мы получим стационарн марковский процесс с перемешиванием.

Рассмотрим теперь другой процесс: $\zeta(t) = x$, если $\eta(t) = (x, i)$. Как функция $\eta(t)$ процесс $\zeta(t)$ также является стационарным процессом с перемешива нием, но является марковским. Из вида траекторий (мы считаем $\zeta(t)$ сепарабельным) следует, ч производная $\xi(t) = d\zeta(t)/dt$ существует с вероятностью единица при каждом фиксир ванном t. Так как $\xi(t) = \pm 1$ и $\left|\frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right| < 1$, то $\mathbf{M}\left|\xi(t) - \frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right|^3 <$

Но из ограниченности третьего момента и сходимости по вероятности вытекает, что $\mathbf{M}\left|\xi(t) - \frac{\zeta(t+\Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t}\right|^2 \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Следовательно, $\xi(t)$ существует в смыс сходимости в среднем квадратичном; $\xi(t)$ является стационарным случайным процесс с перемешиванием, принимающим только два значения $+1$ и -1. При эт $\int_0^p \xi(t)\,dt = \zeta(p) - \zeta(0)$ и $|\zeta(p) - \zeta(0)| < 2$; отсюда, в частности, следует, что дисперс интеграла $\zeta(p)$ ограничена и $\mathbf{D}[\zeta(p) - \zeta(0)] \to 2\mathbf{D}\zeta(0)$ при $p \to \infty$.

Поступила в редакцию
21.6.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Леонов, О дисперсии временных средних стационарного случайного процес са, Теория вероят. и ее примен., **VI**, 1 (1961), 93—101.

[2] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Ус матем. наук, **IV**, 2 (1949), 57—128.

[3] Б. А. Севастьянов, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее при ложение к телефонным системам с отказами, Теория вероят. и ее примен. **II**, (1957), 106—116.

AN EXAMPLE OF STOCHASTIC PROCESS WITH MIXING

Yu. K. BELYAEV (MOSCOW)

(*Summary*)

An example is given of a stochastic process $\xi(t)$ with a continuous parameter and ng, whose range consists of two states; the integral $\zeta(p) = \int_0^p \xi(t)\,dt$ does not have ncrease in variance.

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИЙ

Б. А. РОГОЗИН

В настоящей заметке уточняется доказанное в [1] неравенство для функций концен-ий. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $S = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$

$$Q_i(l) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi_i \leqslant x + l\}, \quad Q(l) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant S \leqslant x + l\}$$

ункции концентрации ξ_i и S соответственно,

$$s = \sum_{i=1}^{n} (1 - Q_i(l)).$$

Теорема 1. *Существует константа C такая, что при $L \geqslant l$*

$$Q(L) \leqslant \frac{CL}{l\sqrt{s}}.$$

дварительно установим следующее:

Лемма 1. *Существует константа C_1 такая, что для независимых случайных вели-$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с распределениями*

$$\mathbf{P}\{\xi_i = x_i\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -x_i\} = \frac{1}{2}, \; x_i \geqslant l,$$

т место неравенство: при $L \geqslant l$

$$Q(L) \leqslant \frac{C_1 L}{l\sqrt{n}}.$$

значим B_n максимальную вероятность в симметричной схеме Бернулли с n независи-ми испытаниями:

$$B_n = C_n^{[n/2]} \cdot 2^{-n}$$

Лемма 2. *Для указанных в лемме 1 случайных величин*

$$Q(2l - 0) = \sup_x \mathbf{P}\{x < S < x + 2l\} \leqslant B_n.$$

Доказательство леммы 2. При доказательстве мы будем проводить рас-ения, аналогичные рассуждениям в работе [2]. Чтобы найти вероятность того, что $S < x + 2l$, нужно найти число сумм $\sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k$ (ε_k равно 1 или -1), попадаю-внутрь интервала $[x, x + 2l]$, и поделить на 2^n. Число сумм, попадающих внутрь

интервала длины $2l$, не превышает $C_n^{[n/2]}$. Действительно, каждой сумме $\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k$ с

ставим подмножество чисел $1, 2, \ldots, n$ по следующему правилу: если $\varepsilon_k = 1$, подмножество входит k. Эти подмножества не содержатся одно в другом, так как, бы они входили одно в другое, то существовал бы номер k', при котором одна су имела на k' месте $x_{k'}$ со знаком плюс, а другая — со знаком минус, и

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k' - \sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k''\right| \geqslant 2l.$$

В [3] имеется теорема, устанавливающая, что число ν элементов любого класс подмножеств множества из n элементов, такого, что никакие $A \in K$ и $B \in K$ не со жатся одно в другом, не превосходит B_n. По этой теореме находим, что

$$Q(2l-0) = \sup_x \mathbf{P}\{x < S < x + 2l\} \leqslant B_n < \frac{C'}{\sqrt{n}}.$$

Утверждение леммы 1 легко следует из леммы 2, так как

$$Q(l) \leqslant Q(2l-0) < \frac{C'}{\sqrt{n}}$$

и, следовательно, при $L \geqslant l$

$$Q(L) \leqslant \frac{C'}{\sqrt{n}}([L/l]+1) \leqslant \frac{2C'L}{l\sqrt{n}}.$$

Вывод теоремы 1 из леммы 1 осуществляется дословно так же, как в [1], поэт мы его опускаем.

Замечание. Для указанных в лемме 1 случайных величин

$$\sup_x \mathbf{P}\{S = x\} = B_n$$

тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Действительно, при $x_1 = x_2 = \ldots =$ соотношение (1), очевидно, выполняется. Обратно, если (1) выполняется, то, очеви $C_n^{[n/2]}$ сумм $\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k$ равны одному и тому же числу. Рассуждая так же, как в лемм мы видим, что для любой пары подмножеств, соответствующих этим суммам, ни о не включается в другое. Используя установленный в [3] результат, убеждаемся, если число элементов класса K с приведенными ранее свойствами равно $C_n^{[n/2]}$, то зательно: а) при n четном K — класс всех подмножеств, содержащих по $n/2$ элемен б) при n нечетном K — класс всех подмножеств, содержащих по $\frac{n-1}{2}$ элементов, класс всех подмножеств, содержащих по $\frac{n+1}{2}$ элементов.

Предположим, не ограничивая общности, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Допустим, при некотором k' $x_{k'} < x_{k'+1}$. Выберем из класса K два элемента A и B так, что

$$A \setminus B = \{k'\},\ B \setminus A = \{k'+1\}.$$

Составим две суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k' \text{ и } \sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k'',$$

где $\varepsilon_k' = 1$ для $k \in A$, $\varepsilon_k'' = 1$ для $k \in B$. Тогда, с одной стороны, эти суммы долж

ть равны. С другой стороны, из $x_{k'} < x_{k'+1}$ следует, что вторая сумма больше вой. Таким образом, должно быть $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Из сказанного можно получить, например, такие утверждения.

1. Если $\prod_{i=1}^{n}(1 + x^{k_i}) = \sum_{m=0}^{k_1+\ldots+k_n} A_m x^m$, то $A_m \leqslant C_n^{[n/2]}$, где знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $k_i = k$.

2. Число решений уравнения $k_1\varepsilon_1 + \ldots + k_n\varepsilon_n = N$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1, не превышает $C_n^{[n/2]}$, причем оно равно $C_n^{[n/2]}$ тогда и только тогда, когда $k_i = k$ и $N = nk/2$ и n четном и $N = \frac{(n-1)k}{2}$ или $N = \frac{(n+1)k}{2}$ при n нечетном.

Из теоремы 1 легко выводится

Теорема 2. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — *последовательность независимых дискретных случайных величин,* $p_i = \sup_x \mathbf{P}\{\xi_i = x\}$. *Тогда*

$$\sup_x \mathbf{P}\{S = x\} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1-p_i)}}. \tag{2}$$

Замечание. Из локальных теорем для решетчатых случайных величин вытекает, что неравенство (2) дает правильную оценку скорости убывания $\sup_x \mathbf{P}\{S = x\}$ (по крайней мере, в случае $p_i = p$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность . В. Прохорову за внимание к работе.

Поступила в редакцию
18.2.60

ЛИТЕРАТУРА

] A. Kolmogorov, Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M. P. Lévy, Ann. de l'Inst., Henri Poincaré, **XVI**, 1 (1958), 27—34.

] P. Erdös, On lemma of Littlewood and Offord, Bull Amer. Math. Soc., **51**, 12 (1945), 898—902.

] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, Math. Zeit., **27**, 4 (1928), 544—548.

ON EVALUATING THE CONCENTRATION FUNCTIONS

B. A. ROGOZIN (MOSCOW)

(Summary)

Let $\xi_1, \ldots, \xi_n$ be independent random variables,

$$Q_k\{l\} = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi_k \leqslant x + l\},$$

$$Q\{L\} = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant x + L\}, \quad s = \sum_{k=1}^{n}(1 - Q_k(l)).$$

We prove the following:

Theorem 1. *If* $L \geqslant l$, *then*

$$Q(L) \leqslant \frac{CL}{l\sqrt{s}},$$

here C *is an absolute constant.*

This is a refinement of the main theorem in [1].

ОБ УВЕЛИЧЕНИИ РАССЕИВАНИЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Б. А. РОГОЗИН

Настоящая заметка имеет своей целью дать обобщение известных теорем, связанных с оценкой скорости убывания функций концентраций сумм независимых случайных величин; возможность такого рода обобщений была указана А. Н. Колмогоровым (см. [3]). Введем обозначения: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, которые будут предполагаться независимыми, $Q_k(l) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi_k \leqslant x + l\}$, $S = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $Q(l) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant S \leqslant x + l\}$ и $s = \sum_{k=1}^{n} (1 - Q_k(l_k))\, l_k^2$. Теорема 1 содержит, как естественные частные случаи, принадлежащие П. Леви [1], Деблину [2], Колмогорову [3] и автору [4] теоремы об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин.

Теорема 1. *Существует постоянная C такая, что из неравенства $L \geqslant \max \frac{l_r}{2}$ следует $Q(L) \leqslant CL/\sqrt{s}$.*

Предварительно докажем следующее.

Лемма. *Существует постоянная C_1 такая, что для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\mathbf{P}\{\xi_k = l_k'\} = \mathbf{P}\{\xi_k = -l_k'\} = \frac{1}{2}$, из неравенства $L \geqslant \max l_k$ следует $Q(L) \leqslant C_1 L/\sqrt{s}$, где $l_k' \geqslant l_k$ и $s = \sum_{k=1}^{n} l_k'^2$.*

Доказательство. Рассмотрим два следующих случая.

1. Число величин l_k', для которых $l_k' \geqslant \max l_k$, больше или равно $\frac{s}{2 \max l_r^2}$.

2. Число величин l_k', для которых $l_k' \geqslant \max l_k$, меньше $\frac{s}{2 \max l_r^2}$.

1. Этот случай сводится к лемме 1 (см. [4]), по которой функция концентрации для частичной суммы случайных величин, удовлетворяющих условию $l_k' \geqslant \max l_k$, будет

$$Q(L) \leqslant \frac{C_3 L}{l} \Big/ \sqrt{\frac{s}{2(\max l_r)^2}}.$$

Так как добавление остальных слагаемых может только уменьшить функцию концентрации, то лемму можно считать в этом случае установленной.

2. Если число $l_k' \geqslant \max l_k$ меньше $s/2 \max l_r^2$, то, очевидно, $\Sigma' l_r^2 \geqslant s - \frac{s \max l_r^2}{2 \max l_r^2} = \frac{s}{2}$, где суммирование распространяется по тем r, для которых $l_r' < \max l_k$, $s' = \Sigma' l_r'^2 \geqslant \frac{s}{2}$. Применим к функции распределения $F'(x)$ суммы этих случайных величин уточнение теоремы Ляпунова, данное Берри и Эссееном (см. [5] и [6]), утверждающее в рассматриваемом случае, что

$$|F'(x) - G_{0,s'}| \leqslant \frac{C_4 \max l_r'}{\sqrt{s'}},$$

где максимум берется по таким l_k', для которых $l_k' < \max l_r$ и $G_{0,s'}$ функция распределения нормального закона с параметрами 0, s'. Отсюда

$$Q(L) \leqslant \frac{L}{\sqrt{2\pi s'}} + 2C_4 \frac{\max l_r'}{\sqrt{s'}} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 2C_4\right) \frac{L}{\sqrt{s}}$$

Доказательство теоремы представляет собой слабое изменение рассуждений, прово-
шихся А. Н. Колмогоровым (см. [3]).

Пусть $F(u)$ — функция распределения. Определим $u(y)$ из неравенств $F(u(y)) \leqslant y \leqslant$
$(u(y)+0)$ с очевидными соглашениями для интервалов постоянства $F(u)$. Рассмот-
случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_n$, независимые и равномерно распределенные в интер-
$(0,1)$, тогда $\xi_k' = u_k(\eta_k)$ будут взаимно независимы с функциями распределения
$) = \mathbf{P}\{\xi_k < x\}$. Без ограничения общности можно считать, что ξ_k удовлетворяют
еднему условию.

Положим $4\varepsilon_k = 1 - Q_k(l_k)$, $x_k' = u_k(\varepsilon_k)$, $x_k'' = u_k(1-\varepsilon_k)$, $x_k'' - x_k' \geqslant l_k$. Рассмо-
м те случайные, для которых $\eta_k < \varepsilon_k$, $\eta_k > 1-\varepsilon_k$. Фиксируем числа

$$Z_k = \begin{cases} \eta_k \text{ для } \eta_k < \varepsilon_k \\ 1-\eta_k \text{ для } \eta_k > 1-\varepsilon_k \end{cases}$$

$= \Sigma' l_k^2$, где суммирование производится по совокупности рассматриваемых случайных
ичин. Легко видеть, что условное совместное распределение этих случайных величин
т таким, как если бы $\mathbf{P}\{\xi_k = a_k + x_k\} = \mathbf{P}\{\xi_k = a_k - x_k\} = \frac{1}{2}$, где

$$x_k = \frac{u_k(1-Z_k) - u_k(Z_k)}{2} \text{ и } a_k = \frac{u_k(1-Z_k) + u_k(Z_k)}{2}.$$

При фиксированных m и Z_k лемма применима к случайным величинам $\xi_k'' = \xi_k - a_k$,
$\geqslant \frac{l_k}{2}$, и, следовательно, для $L \geqslant \max \frac{l_k}{2}$

$$Q(L) \leqslant \frac{2C_1 L}{\sqrt{m}}.$$

этого неравенства для условной функции концентрации немедленно получаем

$$Q(L) \leqslant p + \frac{2C_1 L}{\sqrt{s/4}},$$

$p = 1 - \mathbf{P}\left\{m > \frac{s}{4}\right\}$. В силу того, что $\mathbf{M}m = \sum_{k=1}^{n} l_k^2 2\varepsilon_k = \frac{s}{2}$ и $\mathbf{D}m = \sum_{k=1}^{n} l_k^4 2\varepsilon_k(1-2\varepsilon_k)$
получаем с помощью неравенства Чебышева для $k = \frac{s}{4}$

$$1 - \mathbf{P}\left\{\frac{s}{4} < m\right\} \leqslant \mathbf{P}\{|m - Mm| \geqslant k\} \leqslant \frac{\mathbf{D}m}{k^2} \leqslant \frac{8\max l_k^2}{s}.$$

тому

$$Q(L) \leqslant \frac{4C_1 L}{\sqrt{s}} + \frac{8\max l_k^2}{s}.$$

ак как $\frac{\max l_k^2}{s} \leqslant 1$ $\left(\text{при } \frac{\max l_k^2}{s} \geqslant 1 \text{ неравенство тривиально}\right)$, то

$$Q(L) \leqslant (4C_1 + 8)\frac{L}{\sqrt{s}} = \frac{CL^*}{\sqrt{s}}.$$

Поступила в редакцию
12.6.60

---

* Замечание при корректуре: в настоящее время автором установлен следующий
льтат: существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что при любом L

$$Q(L) \leqslant \int_{C_1 L/\sqrt{s}}^{C_1 L/\sqrt{s}} e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}\,dx + \frac{C_2 \max l_r}{\sqrt{s}}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Lévy. Theorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
[2] W. Doeblin, Sur les sommes d'un grand nombre des variables aléatoires indepe dantes, Bull. Sc. Math., **63** (1939), 23—32, 35—64.
[3] A. Kolmogorov, Sur les propriétés des fonctions concentrations de M. P. Lév Ann. de l'Inst. Henri Poincaré, **XVI**, 1 (1958), 27—34.
[4] Б. А. Рогозин, Об одной оценке функций концентраций, Теория вероят. и примен., **VI**, 1, (1961), 103—105.
[5] A. C. Berry, The accuracy of Gaussian approximation to the sum of independa variates, Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1941), 122—136.
[6] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution function. A mathematical study of t Laplace-Gaussian law, Acta Math., **77** (1945), 1—125.

ON THE INCREASE OF DISPERSION OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

B. A. ROGOZIN (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be independent random variables,

$$Q_k(l) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi_k \leqslant x + l\}$$

$$Q(L) = \sup_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant x + L\}, \quad s = \sum_{k=1}^{n} (1 - Q_k(l_k)) l_k^2.$$

We prove:

Theorem 1. *If* $L > \max l_k$, *then*

$$Q(L) \leqslant \frac{CL}{\sqrt{s}}$$

where C is an absolute constant.

Special cases of this theorem correspond to the results of [1] — [4].

ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И МОМЕНТЫ ДЛЯ МАКСИМУМА СУММ РЕШЕТЧАТЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ СЛАГАЕМЫХ

А. А. БОРОВКОВ

Настоящая заметка является небольшим дополнением к работе автора [1]. Здес полностью сохранены обозначения этой работы и используются непосредственные ссыл на ее формулы. Напомним основные из обозначений [1]: ξ_1, ξ_2 — независимые целочи ленные случайные величины, $a = \mathbf{M}\xi_k$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_k$, $m < \infty$ — наибольшее число, д которого $\mathbf{P}(\xi_k = m) > 0$; $\bar{s}_n = \max_{1 \leqslant v \leqslant n} \left(0, \sum_{k=1}^{v} \xi_k\right)$; $\lambda_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — ветви алге раической функции, порождаемой уравнением $\mathbf{M}\lambda^{-\xi_k} = \frac{1}{z}$, такие, что $|\lambda_j(z)| < 1$ п $|z| < 1$; $\chi_x = \bar{s}_{\eta_x} - x$, где $\bar{s}_{\eta_x} \geqslant x$, $\bar{s}_{\eta_x - 1} < x$; $x > 0$ — целое число. Изучаются зн чение $\mathbf{P}(s_n = x)$ и моменты $\bar{s}_n$.

. Локальные теоремы для $\bar{s}_n$ могут быть получены из формулировок интегральных м во всех случаях, кроме двух, когда справедлива

еорема. Если $a = 0$, $x \to \infty$ *и* $x = o(n)$, *то*

$$\mathbf{P}\{\bar{s}_n = x\} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{n}\right) + O\left(\lambda_2^x\right)\right];$$

$a > 0$ *и* $x \sim an$, *то*

$$\mathbf{P}\{\bar{s}_n = x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\, e^{nG\left(\frac{x}{n} - a\right)}\left[1 + O\left(\frac{x}{n} - a\right) + O\left[\frac{1}{n}\right)\right],$$

$\lambda_2 < 1$ *и функции* H *и* G *определены формулой* (33.2) *и теоремой* 2 *в работе* [1].

Положим $v_{x,n} = \mathbf{P}(\bar{s}_n = x)$, $(x \geqslant 0,\ n \geqslant 0)$. Из результатов главы 3 [1] следует , что *

$$v_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{x,n} z^n = \frac{e(z)}{1 - z} \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{\pi_j(z)},$$

$$e(z) = \prod_{k=1}^{m} (1 - \lambda_k(z)), \quad \pi_j(z) = \prod_{k=1,\, k \neq j}^{m} (\lambda_j(z) - \lambda_k(z))$$

кция $v_x(z)$ аналитична в $\mathfrak{R}^*$. Утверждение теоремы получается при интегрировании $z^{-1}z^{-n-1}v_x(z)$ по $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$ методами, изложенными в §§ 2,3 главы 2. Замечания к емам 4, 5 о зависимости коэффициентов асимптотических разложений от моментов ξ_k здесь сохраняются.

2. Моменты $\bar{s}_n$ могут быть найдены интегрированием производящих функций момен- $(d_n = \mathbf{D}\bar{s}_n + (\mathbf{M}\bar{s}_n)^2)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}\bar{s}_n = \frac{1}{1 - z} \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^m(z)\, e_j(z)}{\pi_j(z)\,(1 - \lambda_j(z))},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n d_n = \frac{1}{1 - z} \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^m(z)\, e_j(z)\,(1 + \lambda_j(z))}{\pi_j(z)\,(1 - \lambda_j(z))^2} \text{ и т. д.}$$

мощью обычных приемов. Основной интерес здесь представляет вид поправок к ным членам. При $a = 0$ получаем (при вычислении коэффициентов следует учесть тож- во $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^m(z)\, e_j(t)/\pi_j(z) \equiv 1 - e(z)$):

$$\mathbf{M}\bar{s}_n = \frac{\sigma\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\varkappa}{6\sigma^2} - \frac{1}{2} - \mathbf{M}\chi + \frac{c_1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$\mathbf{D}\bar{s}_n = n\sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}\frac{\varkappa}{3\sigma} + c_2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

* Отметим, что $v_{x,n}$ при $x = 0$ не удовлетворяет уравнению вида (1.2), так как

$$v_{0,n} = \sum_{j=-M}^{m} p_j \sum_{k=0}^{-j} v_{k,n-1}.$$

при $a > 0$:

$$\mathbf{M}s_n = an + \frac{\sigma^2 + a^2}{2a} - \frac{1}{2} - \mathbf{M}\chi + O\left(\frac{1}{R^n\sqrt{n}}\right),$$

$$\mathbf{D}s_n = \sigma^2 n + c_3 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{R^n}\right).$$

В этих формулах c_1, c_2 и c_3 — постоянные,

$$\varkappa = \mathbf{M}\,\xi_k^3, \quad \mathbf{M}\chi = \lim_{x\to\infty} \mathbf{M}\chi_x.$$

При $a < 0$ с точностью до величин порядка $n^{-1}{}^2R^n$ имеют место равенства (см. [1] гл. 2, § 5):

$$\mathbf{M}\,s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j^m E_j}{\Pi_j(1-\mu_j)} \quad \text{и} \quad d_n = \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_j^n E_j(1+\mu_j)}{\Pi_j(1-\mu_j)^2}.$$

Поступила в редакцию
7.7.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Боровков, Предельные теоремы о распределении максимума сумм огра ниченных решетчатых случайных величин. I, II, Теория вероят. и ее примен. 2 и 4 (1960), 137—171; 377—392.

LOCAL THEOREMS AND MOMENTS FOR MAXIMUMS OF SUMS OF LATTICE RESTRICTED COMPONENTS

A. A. BOROVKOV (MOSCOW)

(Summary)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — independent latticed random variables; $|\xi_k| < \mathbf{M}$; $\overline{s_n} = \max_{1\leqslant v\leqslant n}(0, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_v)$. The formulas for $\mathbf{P}(s_n = x)$ and for first moments $\overline{s_n}$ are obtained in the not

---

FINITE CONTINUOUS TIME MARKOV CHAINS

JOHN G. KEMENY, J. LAURIE SNELL

In a recent book* a systematic method was developed for computing the basic d scriptive quantities of a finite Markov chain. Matrix expressions were obtained for the quantities in terms of certain basic matrices easily obtainable from the transition matri In this note corresponding expressions are given for the basic quantities for a finite co tinuous time chain.

Let $P(t)$, $0 \leq t < \infty$, be the transition matrices for a continuous time Markov cha with a finite number of states. We assume as usual that $\lim_{t\to 0^+} P(t) = I$, where I is t identity matrix. In this case it is well known that $P(t)$ has a right derivative at

Definition 1. Let $P = I + \lim_{t\to 0^+} \frac{[P(t) - I]}{t}$.

Definition 2. Let $P^* = \{p_{ij}^*\}$ where $p_{ij}^* = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}$, $i \neq j$, and $p_{ii}^* = 0$.

* J. G. Kemeny and J. L. Snell, Finite Markov Chains, Princeton, N. J., Van N strand, 1959.

Then $P - I$ is the infinitesimal generator for $P(t)$ and

$$P(t) = e^{t(P-I)}. \tag{1}$$

The entry p^*_{ij} of P^* represents the probability that the process moves to state j when aves i.

The study of Markov chains can be reduced to the study of two basic types of chains, dic chains and absorbing chains. An ergodic chain is one such that it is possible to go een any two states. An absorbing chain is one with at least one absorbing state e from which it is impossible to leave) and such that from any state it is possible to n an absorbing state.

We consider first an ergodic chain. For such a chain $P(t)$ approaches a matrix A al hose rows are the same, and such that

$$AP(t) = P(t)A = A > 0. \tag{2}$$

types of questions may be asked; one type concerns the number and type of transi-, and the other concerns time. For the former type we use P^*, and we may think his as the transition matrix for a finite discrete time chain. Hence all formulas de- l for discrete chains are directly applicable.

We introduce the following notational devices. Let α be the common row of A, and be a column vector and E a matrix with all components 1. Let D be the diagonal ix with diagonal entries given by the reciprocals of the components of α. Finally, ny matrix W we denote by W^T the transpose of W, and by W_{dg} the diagonal ma- obtained from W by setting all off-diagonal entries equal to 0.

Then $P^* = (I - P_{dg})^{-1}(P - P_{dg})$, $A = \xi\alpha$, $\alpha P = \alpha$, and $P\xi = \xi_0$. The matrix P^* may onsidered the transition matrix of an ergodic discrete-time chain. Its limiting matrix as common row $\alpha^* = \{a^*_j\}$ with

$$a^*_j = \frac{(1 - p_{jj})\, a_j}{\sum_k (1 - p_{kk})\, a_k},$$

D^* be the diagonal matrix with $d^*_{jj} = 1/a^*_j$.

Definition 3. Let $Z^* = (I - P^* + A^*)^{-1}$.

It can be shown that the inverse in definition 3 always exists. Let $S^* = Z^* - A^*$. The mean number of steps r^*_i between occurrences of i is the reciprocal of the limit- probability a^*_i. Hence D^* gives these means. We consider next the mean number of taken from i to reach j. Denote this by m^*_{ij}. Here $m^*_{ii} = 0$. Let $M^* = \{m^*_{ij}\}$. Then

$$M^* = (ES^*_{dg} - S^*)\, D^*. \tag{3}$$

$c^* = \text{trace}\ (S^*)$. Then

$$M^* a^{*T} = c^* \xi.$$

, M^* is always non-singular, and hence

$$\alpha^* = c^* (M^{*-1}\, \xi)^T \tag{4}$$

$$P^* = I + (D^* - E)\, M^{*-1}. \tag{5}$$

ce, if we know M^* we can find P^* as follows: From (4) and the knowledge that the of the entries of α^* is 1 we can obtain α^*, and hence D^*. Then P^* is given by (5). does not mean that $P(t)$ can be determined, since the same P^* may be obtained from erent P's. Once we have ignored questions of time, $P(t)$ can no longer be recovered.

The second moment for the number of transitions between occurrences of i is

$$r^{*2}_i (2s^*_{ii} + a^*_i) \tag{6}$$

and the second moment for the number of steps required starting at i to reach j is given by the ij-th entry of the matrix

$$M_2^* = 2\left[M^* S_{dg}^* D^* + S^* M^* - E(S^* M^*)_{dg}\right]. \tag{7}$$

Finally we give the limiting values for $1/n$ times the covariance of the number of times the process enters state i and the number of times that it enters state j in the first n steps. This limit is independent of the starting state and is given by

$$C^* = \{c_{ij}\} = \{a_i^* s_{ij} + a_j^* s_{ji}^* + a_i^* a_j^* - a_i^* \delta_{ij}\}. \tag{8}$$

The quantities $c_{ii} = 2a_i^* s_{ii}^* - a_i^* (1 - a_i^*)$ play the role of the variance in the applications of the central limit theorem to the number of entries into state i in the first n transitions.

Let us now consider quantities concerning time. Here P plays the role of a transition matrix, even through its diagonal entries may be negative. That this is not a serious difficulty may be seen by changing the time scale. If $u = kt$, we define $\overline{P}(u)$ so that $\overline{P}(u) = P(t)$. Then

$$\overline{P} = I + \lim_{u \to 0} \frac{[\overline{P}(u) - I]}{u} = I + (1/k)(P - I) = (1/k) P + (1 - 1/k) I.$$

If P has negative diagonal entries, $\overline{P}$ will have all non-negative entries for sufficiently large k. Then, considered as a discrete time chain, its limiting matrix will be the A matrix of (2). We define $Z = (I - P + A)^{-1}$.

For the time process, a_i represents the fraction of the time that the process spends in state i. When the process is observed to be in state i, the mean time r_i before the next entry into this state is

$$r_i = \frac{1}{a_i (1 - p_{ii})}.$$

Next let $M = \{m_{ij}\}$ be the matrix with m_{ij} the mean first passage time from state i to state j for $i \neq j$, and $m_{ii} = 0$. The equations (3), (4), (5), and (7) hold when the asterisks are removed. Furthermore, P determines the process by (1). Hence knowledge of these mean first passage times determines the chain completely.

In this case we have a simple expression for the matrix $S = Z - A$. This is

$$S = \int_0^\infty [P(t) - A]\, dt. \tag{9}$$

Thus S may be interpreted as a measure of the total deviation from the limiting probabilities.

We will not attempt to give all the proofs for the time quantities, but will give a sample proof later on.

Formulas (6) and (8) must be modified. The analogue of (6) is the second moment $r_i^{(2)}$ of the time to reenter state i when observed to be in i (that is of the time from the present that it will leave and come back again); this is

$$r_i^{(2)} = 2r_i^2 \left[s_{ii}(1 - p_{ii}) + a_i\right]. \tag{10}$$

The limiting covariances corresponding to (8) are

$$C = \{c_{ij}\} = \{a_i s_{ij} + a_j s_{ji}\}. \tag{11}$$

Ve consider next the case of an absorbing chain. For such a chain, if we place all
bsorbing states first, the transition matrix has the form:

$$P(t) = \left(\begin{array}{c|c} I & \mathrm{O} \\ \hline R(t) & Q(t) \end{array}\right).$$

I is an identity matrix, and O consists of 0's. Clearly, P will have the same form
g submatrices R and Q which determine P, and hence the entire process, by (1).
gain form Q^* and R^* as before, restricting p^*_{ij} in definition 2 to the transient
i.
or the *-process all the results of our book are directly applicable. The mean number n_{ij}
nsitions to state j, starting from i, is given by the matrix

$$N^* = (I - Q^*)^{-1}. \tag{12}$$

econd moments of these functions are given by

$$N_2^* = N^*(2N^*_{dg} - 1). \tag{13}$$

nean time to reach an absorbing state is given by

$$\tau^* = N^*\xi. \tag{14}$$

he second moments of these times are found in

$$\tau_2^* = (2N^* - I)\,\tau^*. \tag{15}$$

The unasterisked, or time-process, is again just as interesting. We will again obtain
gous quantities. $N = (I - Q)^{-1}$ will give the mean time spent in various states. We
ave

$$\int_0^t Q(u)\,du = N(I - Q(t))$$

ence

$$N = \int_0^\infty Q(t)\,dt \tag{16}$$

he mean of the total time to absorption is $\tau = N\xi$. However, the second moments
iven by slightly modified formulas.
As an illustration of our method of proof, we will compute the k-th moment, $k > 1$,
e time to absorption. Let T be the time to absorption, and let M_i denote a mean
uted under the assumption that i is the starting state, then

$$M_i[T^k] = \sum_j p_{ij}(\varepsilon)\,M_j[(T+\varepsilon)^k] + \sum_m p_{im}(\varepsilon)\,q_m$$

e the states j are transient, and m are absorbing. The quantities q_m are at most ε^k
will turn out to be negligible. The fact that such terms drop out when $\varepsilon \to 0$ allows
o neglect transitions that occur within time ε. Neglecting terms of order ε^2 and
r, we have

$$M_i[T^k] = \sum_j p_{ij}(\varepsilon)\,M_j\left[T^k + k\varepsilon T^{k-1}\right] + o(\varepsilon),$$

or letting τ_k be the vector of k-th moments,

$$(I - Q(\varepsilon))\,\tau_k = k\varepsilon Q(\varepsilon)\,\tau_{k-1} + o(\varepsilon).$$

We divide through by ε, and let $\varepsilon \to 0$. We obtain

$$(I - Q)\,\tau_k = k\tau_{k-1}.$$

Hence

$$\tau_k = kN\tau_{k-1}.$$

Thus

$$\tau_k = k!N^k\xi.$$

Similarly, the k-th moment of the amount of time spent in state j, starting in i, is g by

$$N_k = k!\,NN_{dg}^{k-1}.$$

Let b_{im} be the absorption probabilities, i. e. the probability that starting in tran state i the process ends in absorbing state m. The matrix $B = \{b_{im}\}$ is given by

$$B = NR = N^*R^*.$$

We have in general that

$$R(t) = \int_0^t Q(u)\,du \cdot R.$$

Formula (19) is a consequence of (20) and (16). Or, we may write

$$R(t) = B - NQ(t)\,R.$$

Formulas for the time (unasterisked) process must be independent of a change o time scale. That is, if $\overline{P}(ct) = P(t)$, then A is unchanged, but quantities measuring must be multiplied by c. These are N, τ, $(I - P_{dg})^{-1}$, S, and M. The k-th moment of a quantity is multiplied by c^k. The formulas may be checked by noting that both must be homogeneous to the same degree in t.

As an example of an ergodic chain we shall consider the general two-state er chain.

$$P = \begin{pmatrix} 1-c & c \\ d & 1-d \end{pmatrix}; \quad c,\ d \geqslant 0;$$

$$A = \frac{1}{c+d}\begin{pmatrix} d & c \\ d & c \end{pmatrix}; \qquad P(t) = A + (I - A)\,e^{-(c+d)t};$$

$$S = \frac{1}{(c+d)^2}\begin{pmatrix} c & -c \\ -d & d \end{pmatrix}; \qquad r_i = \frac{c+d}{cd}; \quad r_i^{(2)} = 2\,\frac{c^2 + cd + d^2}{c^2d^2};$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 1/d & 0 \end{pmatrix}; \qquad tr(S) = \frac{1}{c+d}; \qquad C = \frac{2cd}{(c+d)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

To illustrate absorbing chains, we shall select P to represent a four-state ra walk, with the first and fourth states absorbing. For convenience, we list the two ab

ates first.

$$P=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline q & 0 & 0 & p \\ 0 & p & q & 0 \end{array}\right); \qquad Q=\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}; \qquad R=\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}; \qquad p+q=1.$$

$$N=\frac{1}{1-pq}\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}; \quad N_k=\frac{1}{(1-pq)^k}\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\frac{1}{1-pq}\begin{pmatrix} q & p^2 \\ q^2 & p \end{pmatrix};$$

$$\tau=\frac{1}{1-pq}\begin{pmatrix} 1+p \\ 1+q \end{pmatrix}; \quad \tau_2=\frac{1}{(1-pq)^2}\begin{pmatrix} 1+2p+pq \\ 1+2q+pq \end{pmatrix}.$$

$$Q(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{p/q} \\ -\sqrt{q/p} & 1 \end{pmatrix} e^{-(1+\sqrt{pq})t}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{p/q} \\ \sqrt{q/p} & 1 \end{pmatrix} e^{-(1-\sqrt{pq})t}$$

$$R(t)=B-\frac{1}{2(1+\sqrt{pq})}\begin{pmatrix} q & -p\sqrt{p/q} \\ -q\sqrt{q/p} & p \end{pmatrix} e^{-(1+\sqrt{pq})t}-$$

$$-\frac{1}{2(1-\sqrt{pq})}\begin{pmatrix} q & p\sqrt{p/q} \\ q\sqrt{p/q} & p \end{pmatrix} e^{-(1-\sqrt{pq})t}$$

$$P(t)=\left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R(t) & Q(t) \end{array}\right).$$

There is a striking contrast between the complexity of $P(t)$ and the simplicity of ıtities like N, τ, B. This is closely related to the role eigenvalues play in analyzing kov chains. Eigenvalues are used in giving a closed form expression for $P(t)$, for a n P. But eigenvalues are irrelevant for all the basic quantities discussed in this paper, ell as for many other quantities. The easiest way to see the irrelevance is the follow- Suppose that P has only rational entries. The basic matrix operations employed in paper are all rational operations, hence all the quantities discussed must be rational. ever, the eigenvalues are normally irrational. It seems an unjustifiable complication o outside the field of rational numbers to compute these rational quantities. Hence putation of quantities like those here discussed by means of eigenvalue analysis would ear to be inelegant, as well as wasteful.

Dartmouth College
Hanover, N. H., U. S. A.

Поступила в редакцию
24. 11. 59

КОНЕЧНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

***ДЖОН КЕМЕНИ, ЛАУРИ СНЕЛ** (НЬЮ-ЙОРК)*

(Резюме)

В недавней книге авторов (см. сноску на стр. 110) был развит систематический од вычисления основных характеристик конечных цепей Маркова. Для этих ха- теристик были получены матричные выражения в терминах некоторых основных риц, легко определяемых по переходной матрице.

В настоящей заметке соответствующие выражения даются для базисных харак- истик конечных цепей Маркова с непрерывным временем.

КОНТИНУАЛИЗАЦИЯ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ, Д. К. ФАДДЕЕВ

Пусть R — конечное множество с элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вероятностную мер μ на этом множестве назовем *внутренней*, если для любого $a_i \in R$

$$\mu(a_i) > 0.$$

Множество всех внутренних мер на R обозначим через $W(R)$. Обычно множество $W(R)$ топологизируется введением на нем барицентрической метрики

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \left(\sum_{a \in R} (\mu_1(a) - \mu_2(a))^2\right)^{1/2}.$$

В этой метрике $W(R)$ оказывается топологическим пространством, гомеоморфным $n-$ мерному открытому симплексу. Замыкание же $W(R)$ по барицентрической метрике, явл ющееся множеством всех мер на R, гомеоморфно замкнутому $n-1$-мерному симплекс Такая метризация $W(R)$ имеет тот недостаток, что функции вида

$$\mu(a \mid B) = \frac{\mu(a)}{\mu(B)} \quad (a \in B \subset R) \tag{1}$$

не являются равномерно непрерывными функциями μ на $W(R)$ в смысле барицентрич ской метрики. Этим объясняется и невозможность продолжения условных вероятносте по непрерывности на множество всех вероятностных мер.

Целью этой заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Существует такое отображение φ множества $W(R)$ в $n-1$-мерн евклидово пространство E_{n-1}, что*

1°. *Все функции вида* (1) *являются равномерно непрерывными функциями $\varphi(\mu)$ всем множестве $\varphi W(R)$ в смысле метрики E_{n-1}.*

2°. *Замыкание $\varphi W(R)$ в E_{n-1} гомеоморфно замкнутому $n-1$-мерному симплекс*

Доказательство. Введем на множестве всех мер на R обычную барицентрич скую метрику, сопоставив каждой мере μ точку n-мерного евклидова пространст с координатами $\mu(a_1), \mu(a_2), \ldots, \mu(a_n)$. Множество всех таких точек обозначим чер S. Положим для краткости $\mu(a_k) = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Пусть P — некоторая подстановка символов $1, \ldots, n$. Будем говорить, что точ $X = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ принадлежит подстановке P, если

$$x_{P(0)} \leqslant x_{P(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{P(n)}. \tag{2}$$

Рассмотрим для каждой подстановки P точки $X_P^{(1)}, \ldots, X_P^{(n)}$ соответственно с коо динатами

$$x^{(1)}_{P(n)} = 1, \quad x^{(1)}_{P(n-1)} = x^{(1)}_{P(n-2)} = \ldots = x^{(1)}_{P(1)} = 0;$$

$$x^{(2)}_{P(n)} = x^{(2)}_{P(n-1)} = \frac{1}{2}, \quad x^{(2)}_{P(n-2)} = \ldots = x^{(2)}_{P(1)} = 0;$$

. . . . . .

$$x^{(n-1)}_{P(n)} = x^{(n-1)}_{P(n-1)} = \ldots = x^{(n-1)}_{P(2)} = \frac{1}{n-1}, \quad x^{(n-1)}_{P(1)} = 0; \quad x^{(n)}_{P(n)} =$$

$$= x^{(n-1)}_{P(n-1)} = \ldots = x^{(n)}_{P(2)} = x^{(n)}_{P(1)} = \frac{1}{n}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(P)$ выпуклую оболочку этих точек и для любых подстановок $P_1, \ldots, P_t$ положим

$$\mathfrak{M}(P_1, \ldots, P_t) = \mathfrak{M}(P_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{M}(P_t).$$

$X_P^{(n)}$ является вершиной каждого из многогранников $\mathfrak{M}(P)$, а потому и вершиной ого из многогранников вида (3). Очевидно, для того чтобы точка одновременно длежала подстановкам $P_1, \ldots, P_t$, необходимо и достаточно, чтобы она лежала ной из граней $\mathfrak{M}(P_1, \ldots, P_t)$, входящих в звезду вершины $X_P^{(n)}$ этого многогран- Эту звезду обозначим через $S(P_1, \ldots, P_t)$.

Рассмотрим следующие преобразования n-мерного векторного пространства вместе которыми их свойствами.

°. Переименование координат. Пусть P — подстановка n символов, $= \|\delta_{i\,P(i)}\|$ — соответствующая ей матрица (δ — символ Кронекера).

) Если $X \in S(P)$, то $Y^T = (y_1 \ldots, y_n)^T = M_P X^T \in S(E)$ (T — операция транспони- ия, а E — единичная подстановка), т. е.

$$0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n.$$

б) Если $x \in S(P)$ и $x_i = x_j$, то $y_{P^{-1}(i)} = y_{P^{-1}(j)}$.

°. Преобразование N, определенное на $S(E)$:

$$N(x_1, \ldots, x_n)^T = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)^T$$

а) N-образ $S(E)$ состоит из всех точек Z вида $(z_1, \ldots, z_{n-1}, 1)$, для которых

$$0 < z_k \leqslant 1 \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

. из всех точек, принадлежащих граням единичного куба, входящим в звезду его ины $(1, \ldots, 1)$.

б) Если $x_i = x_{i+1}$, то $z_i = 1$.

в) N есть однозначное и в обе стороны непрерывное отображение $S(E)$ на $NS(E)$.

г) Очевидно,

$$x_i = \frac{z_n z_{n-1} \cdots z_i}{z_n + z_n z_{n-1} + \ldots + z_n z_{n-1} \cdots z_1} \qquad (z_n = 1).$$

тому при $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots < i_s$

$$\frac{x_{i_k}}{x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} + \ldots + x_{i_s}} = \frac{z_{i_s-1} \cdots z_{i_k}}{z_{i_s-1} \cdots z_{i_1} + \ldots + 1}.$$

леднее выражение является функцией Z, равномерно непрерывной на всем множестве E).

3°. Линейное преобразование с матрицей

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \frac{2-n}{n} \\
\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \frac{2-n}{n} + \frac{1}{n-1} \\
\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} - \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \frac{2-n}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} - \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n} - \frac{1}{n-3} & \ldots & \frac{1}{n} - 1 & \frac{2-n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}
\end{pmatrix}$$

а) Если $z_i = 1$, то $(AZ)_i = (AZ)_{i+1}$.

б) В частности, если

$$Z = (1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1)$$

(нулевой является k-ая компонента), то

$$AZ = X_E^{(n-k)}.$$

а) Построим на ребрах $(X_P^{(n)}, X_P^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ многогранника $\mathfrak{M}(P)$ парал лелепипед. Множество точек, входящих в сумму звезды его вершины $X_P^{(n)}$ обозначи через $\mathfrak{P}_P$. Из б) следует, что A-образ $NS(E)$ есть $\mathfrak{P}_E$.

После установления всех этих фактов подвергнем каждое из множества $S(P)$ пр образованию $B_P = M_{P^{-1}} A N M_P$.

Ввиду 2° в) и топологичности линейных преобразований B_P является гомеомо физмом. На основании 1° а), 2° а) и 3° в) $B_P S(P) = \mathfrak{P}_P$. Вследствие 1° б), 2° б), 3° и снова 1° б) для любых подстановок $P_1, \ldots, P_t$ из $X \in S(P_1, \ldots, P_t)$ следует

$$B_{P_1} X = B_{P_2} X = \ldots = B_{P_t} X.$$

Поэтому все преобразования B_P на множествах S_P являются согласованными и м гут быть заменены некоторым единым преобразованием ψ, являющимся гомеоморфизмо $W(R)$ на $\bigcup_P \mathfrak{P}_P$. Замыкание $\bigcup_P \mathfrak{P}_P$ представляет собой звездчатый многогранник, которы может быть получен из замкнутого $n-1$-мерного симплекса дополнением каждо $n-1$-мерного элемента в барицентрическом подразделении симплекса до параллелеп педа, построенного на ребрах элемента, сходящихся в центре тяжести подразделяемо симплекса. Этот звездчатый многогранник, очевидно, гомеоморфен замкнутому симплекс

Наконец из 2° г) и равномерной непрерывности линейных преобразований вытекае что функции вида (1) равномерно непрерывны на $BW(R)$.

Поступила в редакцию
8.10.59

CONTINUALIZATION OF CONDITIONAL PROBABILITIES

D. K. FADDEYEV, N. N. VOROBJEV *(LENINGRAD)*

(Summary)

Probability measure μ on finite set R is called interior if $\mu(a) > 0$ for any $a \in R$. The set of all interior measures on R is denoted by $W(R)$.

Theorem. *There exists a mapping φ of $W(R)$ into Euclidean space E of suitable dimension with two properties:*

1. *All conditional probabilities*

$$\mu(a \mid A) = \frac{\mu(a)}{\mu(A)} \quad (a \in A \subset R)$$

are uniformly continuous functions of $\varphi\mu$ on the whole set $\varphi W(R)$ in the sense of the metric on E

2. *The closure of $\varphi W(R)$ in E is homeomorphic to the closed simplex of suitable dimension.*

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СУММ УСЛОВНО-НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

Пусть $X = (X_0, X_1, \dots)$ — однородная цепь Маркова в измеримом пространстве) ($\mathfrak{B}$ — σ-алгебра подмножеств D), B — событие, измеримое относительно $X_0, X_1,$.; $A \in \mathfrak{B}$. Обозначим

$$\mathbf{P}_x(B) = P\{B \mid X_0 = x\}; \quad P^{(n)}(x, A) = \mathbf{P}_x\{X_n \in A\}; \quad P^{(1)}(x, A) = P(x, A).$$

ы скажем, что $\{\eta_n\}$ — *последовательность условно-независимых случайных вели- связанных с цепью X, если при всех n выполняются соотношения*:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 < z_1,\ \eta_2 < z_2, \dots,\ \eta_n < z_n \mid X_0,\ X_1, \dots,\ X_n\} =$$

$$\{\eta_1 < z_1 \mid X_0,\ X_1\} \cdot \mathbf{P}\{\eta_2 < z_2 \mid X_0,\ X_1,\ X_2\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}\{\eta_n < z_n \mid X_0,\ X_1, \dots,\ X_n\}. \quad (1)$$

вие (1) означает, что при заданных $X_0, \dots, X_n$ случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_n$ исимы между собой и не зависят от $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$; условные вероятности

$$\mathbf{P}\{\eta_1 < z \mid X_0 = x_0,\ X_1 = x_1\} = F(z \mid x_0,\ x_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{P}\{\eta_n < z \mid X_0 = x_0, \dots,\ X_n = x_n\} = F(z \mid x_0, \dots,\ x_n)$$

ге с $P(x, A)$ определяют совместное распределение величин $\eta_1, \dots, \eta_n$. Настоящая тка посвящена изучению предельных распределений нормированных сумм $(\zeta_n - A_n)/B_n$, $_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$ (см. п. 3).

2. Приведем несколько примеров, оправдывающих схему, изложенную в п. 1.

Пример 1. Случайная величина η_n измерима относительно X_{n-1}. Изучению предель- распределений соответствуюших нормированных сумм посвящено много работ (см. имер, [1—3]).

Пример 2. Случайная величина η_n измерима относительно $X_0, \dots, X_{n-1}$ и пред- ляет собой наиболее общий «неслучайный» функционал от траектории марковской

.

Пример 3. Изучение предельного распределения нормированных сумм $(\zeta_n - A_n)/B$, зно для изучения предельного распределения случайных величин

$$\zeta_T = \int_0^T f(X_t)\,dt \quad (T \to \infty),$$

X_t — траектория строго марковского процесса. Пусть, например, X_t — траектория рерывного строго марковского процесса на плоскости, возвратного относительно окруж- ти F_1 с центром в начале координат *. Пусть F_2 — окружность большего радиуса ентром в начале координат. Назовем циклом участок траектории процесса от точки F_1 до первого достижения F_1, осуществившегося после первого достижения F_2. ть, для определенности, $X_0 \in F_1$. Обозначим: τ_i — время, i-го цикла, $s_i = \tau_1 + \dots$

* Непрерывность процесса и то, что его фазовым пространством является плоскость, ущественны. Возвратным относительно F_1 процессом на плоскости естественно назвать цесс, в котором при любом начальном распределении, почти наверное, существует t ое, что $X_t \in F_1$.

$\ldots + \tau_i$, ν_T — число циклов за время T,

$$X_i = X_{s_i}, \quad \eta_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(X_t)\,dt, \quad \alpha_T = \int_{s_{\nu_T}}^{T} f(X_t)\,dt.$$

Последовательность $\{X_n\}$ представляет собой траекторию однородной марковской це на F_1. Кроме того,

$$\zeta_T = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{\nu_T} + \alpha_T. \qquad (1$$

В некоторых случаях удается доказать, что предельное распределение $[\zeta_T - A(T)]/B($ совпадает с предельным распределением* нормированной суммы $\widetilde{\zeta}_T = \eta_1 + \ldots + \eta_{N(T}$ где $N(T) = M\nu_T$. Так как процесс X_t — строго марковский, то величины η_i укладыв ются в схему, изложенную в п. 1. В этом случае $F(z \mid x_0, \ldots, x_n) = F(z \mid x_{n-1}, x_n$

3. Для получения содержательных результатов относительно предельного распред ления нормированных сумм в столь общей обстановке необходимо потребовать, что при фиксированном k и $n \to \infty$ функция распределения $F(z \mid x_0, \ldots, x_n)$ асимптотичес мало зависила от $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Мы введем более ограничивающую гипотезу.

Будем говорить, что *семейство* $\{\eta_n\}$ *условно-независимых случайных величин, с занных с цепью* X, *удовлетворяет гипотезе* A, *если существует целое положительн число* N *такое, что при* $n > N$ *функции* $F(z \mid x_0, \ldots, x_n)$ *зависят лишь от последн* N *аргументов, т. е.*

$$F(z \mid x_0, \ldots, x_n) = F^{(n)}(z \mid x_{n-N+1}, \ldots, x_n).$$

Обозначим

$$M\left\{e^{it\eta_n} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right\} = \begin{cases} \varphi(t \mid x_0, \ldots, x_n), & \text{если } n < N, \\ \varphi^{(n)}(t \mid x_{n-N+1}, \ldots, x_n), & \text{если } n \geqslant N, \end{cases}$$

и пусть $\bar{a}$ — комплексное число, сопряженное a. Чтобы не загромождать формулиров теоремы несущественными деталями, мы предположим, что гипотеза A выполняется при $N = 2$.

Теорема 1. *Пусть при* $N = 2$ *выполняется гипотеза* A, *и пусть, кроме то*

1) *цепь Маркова равномерно эргодична (т. е.* $P^{(n)}(x, A) \to P(A)$ $(n \to \infty)$ *равном но по* $x \in D$ *и* $A \in \mathfrak{B}$);

2) *при некотором* α $(0 < \alpha \leqslant 2,\ \alpha \neq 1)$ *имеет место представление* ***

$$\varphi^{(k)}(t \mid x, y) = \begin{cases} 1 + i\gamma_k(x, y)\,t + c_k(x, y)\,t^{\alpha} + \psi_1^{(k)}(t, x, y), & \text{если } t > 0, \\ 1 + i\gamma_k(x, y)\,t + \overline{c_k}(x, y)\,|t|^{\alpha} + \psi_2^{(k)}(t, x, y), & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

где $\gamma_k \equiv 0$ *при* $\alpha < 1$ *и* $\psi_i^{(k)} = o(|t|^{\alpha})$ $(t \to 0)$ *равномерно по* $x, y \in D$ *и* $k = 1, 2, \ldots$

---

* Этим методом Деблин в [4] впервые доказал для цепей Маркова асимптотическ нормальность числа попаданий в некоторое состояние. Методом Деблина А. Н. Коль горов в [5] доказал локальную предельную теорему для конечных цепей (см. также [6

** Заменив исходную цепь X_n на $X_n^* (X_n, \ldots, X_{n-N+1})$, можно случай произво ного N свести к случаю $N = 1$, однако такая редукция не упрощает выкладки.

*** Случай $\alpha = 1$ является исключительным и его следует рассматривать отдель

3) *для почти всех* x, y *по мере* $\widetilde{P}(dx)P(x, dy)$ *существует*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i(x, y)=c(x, y);$$

4) *при* $x, y\in D$ *функции* c_i *равномерно ограничены:*

$$|c_i(x, y)|\leqslant c<+\infty\quad(i=1, 2, \ldots).$$

да при $n\to\infty$ *равномерно относительно начального распределения вероятность* $\zeta_n-A_n)n^{-1/\alpha}<z\}$ *стремится к функции устойчивого распределения* $G_\alpha(z)$, *характ-истическая функция которого имеет вид* $f(t)=\exp\{(a'+ib'\cdot\operatorname{sgn}t)|t|^\alpha\}$, *причем,* $\alpha>1$, *то* $A_n=\mathbf{M}\zeta_n$, *если же* $\alpha<1$, *то* $A_n=0$, *и*

$$a=a'+ib'=\int_D P(dx)\int_D c(x, y)P(x, dy).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что в представле-(3) $\gamma_k(x, y)\equiv 0$. Обозначим через $\varphi_n(t, A\mid x_0)$ интеграл

$$\int_{\{\ldots\in A\}}e^{it\zeta_n}\mathbf{P}_{x_0}(d\omega)=\int_{\{x_1\in D\}}\cdots\int_{\{x_{n-1}\in D\}}\int_{\{x_n\in A\}}\prod_{i=1}^{n}[\varphi^{(i)}(t\mid x_{i-1}, x_i)P(x_{i-1}, dx_i)].$$

и $t>0$, то подынтегральная функция имеет вид

$$\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[1+c_i(x_{i-1}, x_i)t^\alpha+\psi_1^{(i)}(t, x_{i-1}, x_i)\right]P(x_{i-1}, x_i)\right\}.$$

юда в силу условий 1) и 4) следует, что равномерно по x_0 и A

$$\left|\varphi_n(t, A\mid x_0)-P^{(n)}(x_0, A)-t^\alpha\int_{\{x_n\in A\}}\left[\sum_{i=1}^{n}c_i(X_{i-1}, X_i)\right]\mathbf{P}_{x_0}(d\omega)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k\ 2}^{n}(nct^\alpha)^k+nc(t^\alpha)=o(nt^\alpha)\quad(nt^\alpha\to 0).\qquad(4)$$

Пусть $k=[\sqrt{n}]$. Если $k<j\leq n-k$, то в силу равномерной эргодичности цепи $n\to\infty$ имеем равномерно по x_0 и A:

$$\int_{\{\ldots\in A\}}c_j(X_{j-1}, X_j)\mathbf{P}_{x_0}(d\omega)=\int_D P^{(j-1)}(x_0, dy_1)\int_D c_j(y_1, y_2)P^{(n-j-1)}(y_2, A)P(y_1, dy_2)=$$

$$=\int_D\widetilde{P}(dy_1)\int_D c_j(y_1, y_2)\widetilde{P}(A)P(y_1, dy_2)\quad[1+o(1)].$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\{X_n \in A\}} \sum_{j=1}^{n} c_j(X_{j-1}, X_j)\, \mathbf{P}_{x_0}(d\omega) = \int\limits_{\{X_n \in A\}} \sum_{j=k+1}^{n-k} c_j(X_{j-1}, X_j)\, \mathbf{P}_{x_0}(d\omega) + O(k) =$$

$$= \int\limits_D \widetilde{P}(dy_1) \int\limits_D \widetilde{P}(A) \sum_{j=k+1}^{n-k} c_j(y_1, y_2)\, P(y_1, dy_2)\,[1 + o(1)] + O(k) =$$

$$= n\widetilde{P}(A) \left[\int\limits_D \widetilde{P}(dx_0) \int\limits_D \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} c_j(x_0, x_1)\, P(x_0, dx_1) + o(1) \right] = n\widetilde{P}(A)\,[a + o(1)]\,. \quad (5)$$

Используя (4) и (5), при $n \to \infty$ и $nt^{\alpha} \to 0$ получим равномерно по x_0 и A

$$|\, \varphi_n(t, A) \,|\, x_0) - P(A)\,(1 + ant^{\alpha})\,| = o(nt^{\alpha}). \quad (6)$$

Пусть $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция случайной величины ζ_n при начальном распределении $P_0(A)$, и пусть $n = km + l$, где $m \leqslant l < 2m$, $k \to \infty$ и $m \to \infty$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\varphi_n(t) = \int\limits_D P_0(dy_0) \int\limits_D \varphi_m(t, dy_1 \,|\, y_0) \ldots \int\limits_D \varphi_m(t, dy_k \,|\, y_{k-1})\, \varphi_l(t, D \,|\, y)\,.$$

Используя оценку (6), получим

$$\varphi_n(t) = \prod_{j=1}^{k} [1 + amt^{\alpha} + \chi_j(m, t)]\,[1 + alt^{\alpha} + \chi_{k+1}(l, t)],$$

где

$$\chi_j(m, t) = o(mt^{\alpha})$$

равномерно по начальному распределению $P_0(A)$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(tn^{-1/\alpha}) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ m\to\infty}} \prod_{j=1}^{k} \left[1 + a\,\frac{m}{km + l}\, t^{\alpha} + \chi_j(m, tn^{-1/\alpha})\right] =$$

$$= \lim_{\substack{k\to\infty \\ 1 \leqslant l/m < 2}} \left[1 + \frac{a}{k + (l/m)}\, t^{\alpha}\right]^k = \exp(at^{\alpha}).$$

Аналогично при $t < 0$ получим, что $\varphi_n(tn^{-1/\alpha}) \to \exp(\overline{a}\,|\,t\,|^{\alpha})$. Теорема доказана.

Замечание. 1. Пусть функция $V_n(x, y)$ ограничена на $D \times D$. Из доказанной теоремы следует, что предельное распределение нормированной суммы $\Sigma_{k=1}^{n} V_k(X_{k-1}, X_k$ нормально, если для почти всех x, y по мере $\widetilde{P}(dx)\,P(x, dy)$ при $n \to \infty$ существует предел суммы $\Sigma_{k=1}^{n} V_k^2(x, y)/n$. Для случая $V_k(x, y) = V(x)$ эта теорема (при более сла бых требованиях, чем ограниченность $V(x)$) доказана в [1—3].

Замечание 2. В случае $N > 2$ формулировку условия 3 теоремы 1 следует за менить условием: 3′) *для почти всех* $x_0, \ldots, x_{N-1}$ *по мере* $P(dx_0)\,P(x_0, dx_1, \ldots$ $\ldots, P(x_{N-2}, dx_{N-1})$ *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = c(x_0, \ldots, x_{N-1});$$

постоянная a определяется формулой

$$a = \int\limits_D P(dx_1) \int\limits_D P(x_1, dx_2) \ldots \int\limits_D c(x_1, x_2, \ldots x_N)\, P(x_{N-1}, dx_N).$$

С помощью представления (2) можно получить результаты Каллианпура и Роб- [7] и более общие теоремы для предельных распределений $\Xi(T) = [\zeta(T) - T)]/B(T)$ при $T \to \infty$. Особенно прост для исследования одномерный процесс, так этом случае η_i — независимые одинаково распределенные случайные величины. В гве предельных распределений для $\Xi(T)$ здесь могут получиться все указанные ером в [12] возможные предельные распределения для числа попаданий в некоторое яние цепи Маркова *.

случае процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, условия сходи- к тому или иному предельному закону можно выразить через коэффициенты диф- циальных уравнений. Приведем несколько таких теорем без доказательств.

Пусть маркозский процесс на прямой $-\infty < x < +\infty$ описывается дифференциаль- уравнением $\frac{\partial u}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (к такому виду можно преобразованием координат приве- любой процесс с отражающими границами (см. [9]); если хотя бы одна из границ точек притягивающая, то задача изучения предельных распределений $\Xi(T)$ неинте-). Предположим, что $f(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция.

Теорема 2. *Если*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a(x)}\int_0^x dy\int_y^\infty \frac{dz}{a(z)} < +\infty \quad и \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{a(x)}\int_x^0 dy\int_{-\infty}^y \frac{dz}{a(z)} < +\infty, \tag{7}$$

ри $T \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{c_2\sqrt{T}}\left[\int_0^T f(X_s)\,ds - c_1 T\right] < x\right\} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2}du, \tag{8}$$

ем (7) являются необходимым условием того, чтобы для любой ограниченной функ- $f(x)$ имело место соотношение (8).

Заметим, что (7) являются необходимым и достаточным условием существования ерсии времени одного цикла (см. [9]). В случае расходимости одного из интегралов редельными законами могут быть распределения, указанные в [12]. Условия сходи и к данному распределению здесь уже более громоздки. Они выражаются в терми- асимптотического поведения при $u \to 0$ решений $z_u^{(1)}(x)$ и $z_u^{(2)}(x)$ уравнения

$$\frac{d^2 z_u}{dx^2} - \frac{u}{a(x)}z_u = 0, \tag{9}$$

летворяющих граничным условиям: $z_u^{(1)}(0) = 1$ и $z_u^{(1)}(x) < 1$ при $x > 0$, а также $0) = 1$ и $z_u^{(2)}(x) < 1$ при $x < 0$.

Теорема 3. *Если*

ешения уравнения (9) с указанными выше граничными условиями допускают пред- ление $(u \to 0)$

$$z_u^{(i)}(0) = 1 + a_i u + b_i u^\alpha h\left(\frac{1}{u}\right) + o\left[u^\alpha h\left(\frac{1}{u}\right)\right] \quad (i = 1, 2),$$

$0 < \alpha < 2$ $(\alpha \neq 1)$, a_i и b_i — *постоянные* $(a_1 = a_2 = 0$ *при* $\alpha < 1$, $b_1^2 + b_2^2 > 0)$, u) — *медленно меняющаяся функция* (*т. е. для любого* $k > 0$ $h(kx)/h(x) \to 1$ *при* $+\infty$);

2) *функция* $f(x)$ *такова, что* $J = \int [|f(x)|/a(x)]\,dx < +\infty$, $d = \int [f(x)/a(x)]\,dx \neq 0$,

* В работе Дарлинга и Каца [8] доказано, что при некотором ограничении на асим тическое поведение преобразования Лапласа от переходной вероятности марковского цесса класс предельных законов для $\Xi(T)$ совпадает с классом распределений, ука- ных Феллером в [12].

причем, если $\alpha > 1$, *то* $\int [\,|xf(x)|/a(x)]\,dx < +\infty$ (*интегрирование производится по всей числовой прямой*).

Тогда для любого начального распределения вероятностей при $T \to \infty$

$$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{b(T)}\left[\int_0^T f(X_s)\,ds - cT\right] < x\right\} \to \begin{cases} 1 - G_\alpha(-x), & \text{если } 1 < \alpha < 2, \\ 1 - G_\alpha(x^{-1/2}), & \text{если } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

где $G_\alpha(x)$ — *функция устойчивого распределения с параметрами* α *и* $\beta = -1$ (*см.* [13]), *величины* c *и* $b(T)$ *могут быть выражены явно через распределение длительности цикла* (*см. пример* 3), *причем если* $0 < \alpha < 1$, *то* $c = 0$.

Теорема 3 не является сколько-нибудь окончательной, так как обычно трудно проверить выполнимость условия 1). Однако, если $a(x) = |x|^\beta$, то условие 1) удается проверить с помощью замены переменного $y = xu^{1/(2-\beta)}$ в уравнении (9). В результате получается процесс, описываемый уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |x|^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в [10] доказано, что при $-\infty < \beta < 1$ существует процесс, описываемый этим уравнением на всей прямой). При этом если функция $f(x)$ такова, что $J < +\infty$ и $d \neq 0$, то при $T \to \infty$

$$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{cT^{1/(2-\beta)}}\int_0^T f(X_t)\,dt < z\right\} \to 1 - G_{1/(2-\beta)}(z^{\beta-2}).$$

Если же $d = 0$, то

$$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{c_1 T^{1/2(2-\beta)}}\int_0^T f(X_t)\,dt < z\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \left\{1 - G_{1/(2-\beta)}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{2(2-\beta)}\right]\right\} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy.$$

В частном случае $\beta = 0$ (винеровский процесс) эти распределения совпадают с распределениями, полученными Р. Л. Добрушиным в [11]. Случай $d \neq 0$ для винеровского процесса рассматривался в [7].

Выражаю благодарность Е. Б. Дынкину за ряд ценных советов и А. Н. Колмогорову, который прочитал первый вариант рукописи и сделал ряд замечаний, способствовавших ее улучшению.

Поступила в редакцию
18.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956, 202—211.
[2] Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, Укр. матем. ж., **6**, 1 (954), 21—27.
[3] С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., **II**, 4 (1957), 379—416.
[4] W. Doeblin, Sur deuz problémes de M. Kolmogoroff concernant des chaines dénombrables, Bull. Soc. Math. France, **66** (1938), 210—220.
[5] А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, (1950), 287—300.
[6] В. А. Волконский, Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний, Теория вероят. и ее примен., **II** 2 (1957), 230—255.
[7] Kallianpur and Robbins, Ergodic property of the Brownian motion process, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 6 (1953), 625—533.

. Darling and M. Kac, On occupation times for Markoff processes, Trans. mer Math. Soc., 84, 2 (1957), 444—458.
Р. З. Хасьминский, Распределение вероятностей для функционалов от траекторий случайного процесса диффузионного типа, ДАН СССР, 104, 1 (1955), 22—25.
W. Feller, Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 67, (1949), 98—119.
Р. Л. Добрушин, Две предельные теоремы для простейшего случайного блуждания по прямой, Успехи матем. наук, X, 3 (1955), 139—146.
W. Feller, Fluctuation theory of recurrent event, Trans. Amer. Math. Soc., 67, (1949), 98—119.
Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949.

ON LIMIT DISTRIBUTIONS FOR SUMS OF CONDITIONALLY INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

R. Z. HASMINSKY (*MOSCOW*)

(*Summary*)

This paper deals with limit distributions for sums η_n which become independent a certain path $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ of a Markov chain is defined. The dependence een $\{\eta_n\}$ and $\{X_n\}$ is expressed more exactly by (1).

Let X_s be the path of a continuous Markov process. Furthermore, the study of the distributions of $\zeta(t) = \int_0^t f(X_s)\,ds$ at $t \to \infty$ can be reduced to the study of limit butions of sums η_n. This reduction is illustrated for the case where X_s is a single-nsional diffusion process. The limit distribution for $\zeta(t)$ coincides with distributions ned in [12]. The sufficient conditions for convergence to each distribution are also (Theorems 2 and 3).

ИНВАРИАНТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МЕРЫ НА СФЕРЕ

В. Н. ТУТУБАЛИН

В настоящей работе показано, что инвариантные в широком смысле случайные меры фере (определение см. в п. 4) являются частным случаем изотропных обобщенных айных полей (см. [2, 3]) и найдены соответствующие спектральные разложения. та выполнена под руководством Е. Б. Дынкина, которому автор искренне благодарен.

1. Пусть S — сфера, $G = \{g\}$ — группа ее вращений, K — пространство бесконечифференцируемых функций с топологией Л. Шварца, $Y_m^l (m = 0, 1, 2, \ldots$ и $l = -m, \ldots, m)$ — сферические функции (см. [1]). Легко доказать, что если $f \in K$, то последтельность $f_m^l = \int_S f(x)\,\overline{Y_m^l}(x)\,dx$ (dx — элемент площади на сфере) быстро убывает: $| \leqslant c_k (m+1)^{-k}$ для каждого $k > 0$; обратно, если $\{f_m^l\}$ быстро убывает, то $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=-m} f_m^l Y_m^l(x) \in K$. Отсюда следует, что если F — обобщенная функция над K, последовательность $F_m^l = F(Y_m^l)$ медленно возрастает, т. е. существует k такое, $F_m^l| \leqslant C(m+1)^k$, C — постоянная. Таким образом, обобщенная функция F пред-

ставляется рядом $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} F_m^l \overline{Y_m^l(x)}$ в том смысле, что при $N \to \infty$

$$\int_S \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} F_m^l \overline{Y_m^l(x)} \right\} f(x)\, dx \to F(f)$$

для любой $f \in K$.

2. Пусть $L_\Omega^2 = L_{(\Omega,P)}^2$ — пространство случайных величин $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ((Ω, P) — роятностное пространство) таких, что $\mathbf{M}|\xi|^2 < \infty$. Следуя [2], дадим определение и тропного случайного поля.

Определение. Обобщенным случайным полем называется отображение ξ пространства $K = \{\varphi\}$ в L_Ω^2, непрерывное в том смысле, что если $\varphi_n \to \varphi$ в K, то $\xi(\varphi_n)$ $\to \xi(\varphi)$ в L_Ω^2. Обобщенное поле $\xi(\varphi)$ называется изотропным, если для любого g

$$\mathbf{M}\xi(\varphi(x))\overline{\xi(\psi(x))} = \mathbf{M}\xi(\varphi(g^{-1}x))\overline{\xi(\psi(g^{-1}x))}$$

для любых φ и $\psi \in K$.

Теорема 1. *Пусть $\xi(\varphi)$ — обобщенное изотропное поле. Тогда для любой функции $\varphi \in K$*

$$\xi(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \xi_m^l(\omega) \int_S \overline{Y_m^l(x)}\, \varphi(x)\, dx,$$

где $\xi_m^l \in L_\Omega^2$ и $\mathbf{M}|\xi_m^l|^2 = a_m$ не зависит от l, $\mathbf{M}\xi_m^l \xi_{m_1}^{l_1} = 0$, если $m \neq m_1$ или $l \neq$ Последовательность a_m медленно возрастает. Ряд в (1) сходится в L_Ω^2. Обратно, ф мула (1) при перечисленных ограничениях задает изотропное обобщенное случайное по

В силу формулы (1) случайную величину

$$\xi(x, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{m} \xi_m^l(\omega)\, \overline{Y_m^l(x)}$$

естественно называть спектральным разложением поля.

Для доказательства теоремы 1 заметим, что если $\varphi(x, \omega) \in K$, то поле $\widetilde{\xi}_M$ опре ленное формулой

$$\widetilde{\xi}_M(\varphi) = \xi(\varphi_M), \text{ где } \varphi_M = \sum_{m=0}^{M}\sum_{l=-m}^{m} \varphi_m^l Y_m^l(x),$$

также является изотропным, так как $Y_m^l(g^{-1}x)$ есть линейная комбинация функц $\{Y_m^l(x)\}$ с тем же самым m (см. [1]). Поэтому, если положить $\xi_m^l = \xi(Y_m^l)$, то сог сно [3] $\mathbf{M}\xi_m^l \xi_s^r = a_m \delta_l^r \delta_m^s$, где $\widetilde{\sigma}_i^j$ — символ Кронекера.

Покажем, что последовательность a_m медленно возрастает. Если это не так, то ществует возрастающая последовательность индексов $\{m_p\}$ такая, что $a_{m_p} > (m_p + 1$ Тогда последовательность $\{b_m\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ ($b_m = 0$, если $m \neq m_p$ и b_m $= (a_m)^{-1/2}$, если $m = m_p$) быстро убывает, и при $M \to \infty$

$$\sum_{m=0}^{M} b_m Y_m^0(x) \to \sum_{m=0}^{\infty} b_m Y_m^0(x) \in K$$

ндимость в K), но последовательность

$$\xi\left(\sum_{m=0}^{M} b_m Y_m^0(x)\right) = \sum_{m=0}^{M} b_m \xi_m^0$$

ходится в L_Ω^2, что противоречит определению обобщенного поля.

Обратно, если $\{a_m\}$ медленно возрастает, то формула (1) задает, как нетрудно ви-ь, обобщенное случайное поле. Легко проверяется формула:

$$\sum_{l=-m}^{m} Y_m^l(x)\,\overline{Y_m^l(y)} = \frac{2m+1}{4\pi} P_m[(x, y)],$$

P_m — полином Лежандра, (x, y) — косинус расстояния между x и y. С помощью й формулы для поля, заданного формулой (1), получаем:

$$\mathrm{M}\xi(\varphi)\overline{\xi(\psi)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \iint_{S\times S} P_m[(x, y)]\,\varphi(x)\,\overline{\psi(y)}\,dx\,dy,$$

е φ и $\psi \in K$. Поэтому поле ξ изотропно.

3. Рассмотрим случайные меры на алгебре $\mathfrak{B}$ многоугольников, ограниченных ду-ми больших кругов. Предположим, что существует $\mathrm{M}|\mu(A)|^2$ для любого $A \in \mathfrak{B}$. ера μ называется σ-аддитивной, если для любых $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ таких, что $A_i = A \in \mathfrak{B}$, с вероятностью 1 $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, где ряд сходится в среднем.

Если $f(x)$ — ступенчатая $\mathfrak{B}$-измеримая функция, принимающая значения $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то интегралом $\int f(x)\,\mu(dx)$ от функции f по мере μ называется случайная ве-чина из L_Ω^2, определенная равенством:

$$\int f(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(x : f(x) = c_i).$$

Лемма 1. *Если мера μ такова, что $\sup_{A\in\mathfrak{B}} \mathrm{M}|\mu(A)|^2 < \varkappa < \infty$ и ступенчатая функ-я f не превосходит по модулю ε, то*

$$\mathrm{M}\left|\int f(x)\,\mu(dx)\right|^2 \leqslant 32\varkappa\varepsilon^2. \tag{2}$$

Таким образом, мера μ имеет ограниченную вариацию на сфере (см. [6]) (вариацией ры μ называется $\sup \sqrt{\mathrm{M}\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)\right|^2}$, где верхняя грань берется по всевозмож-им α_i, не превосходящим по модулю 1, а также по разбиениям S на множества $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}$).

Для доказательства достаточно установить, что если f и μ принимают вещественные ачения, то $\mathrm{M}|\int f(x)\,\mu(dx)|^2 \leqslant 4\varkappa\varepsilon^2$. Но в этом случае $\mathrm{M}|\int f(x)\,\mu(dx)|^2$ — неотрицатель-я квадратичная форма от значений c_i функции f. Легко видеть, что неотрицательная ква-ратичная форма $\Sigma a_{ij} c_i c_j$ достигает максимума в кубе $|c_i| \leqslant \varepsilon$ в некоторой его вершине $c_1^0, \ldots, c_n^0$ (множество $\Gamma_a = \{\Sigma a_{ij} c_i c_j \leqslant a\}$ при любом a выпукло, поэтому если все вер-

шины куба принадлежат Γ_a, то и весь куб принадлежит Γ_a). Следовательно,

$$\mathbf{M}\left|\int f(x)\,\mu(dx)\right|^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathbf{M}\,|\mu(A') - \mu(A'')|^2 \leqslant 4\varkappa\varepsilon^2,$$

где

$$A' = \bigcup_{\{i:c_i^0 = \varepsilon\}} \{x : f(x) = c_i\} \text{ и } A'' = \bigcup_{\{i:c_i^0 = -\varepsilon\}} \{x : f(x) = c_i\}.$$

С помощью неравенства (2) обычным способом определяется интеграл по мере μ (предполагается, что $\mathbf{M}\,|\mu(A)|^2 < \varkappa$ для любого $A \in \mathfrak{B}$) от произвольной функции, представимой в виде равномерно сходящейся последовательности ступенчатых $\mathfrak{B}$-измеримых функций. Неравенство (2), очевидно, остается справедливым и для этих функций. В частности, интеграл определен для всех функций из K и задает обобщенное случайное поле. Известно (см. [6]), что σ-аддитивную случайную меру μ ограниченной вариации можно продолжить на измеримые по Лебегу множества.

4. Определение. Мера μ называется инвариантной в широком смысле, если для любого $g \in G$

$$\mathbf{M}\mu(A)\,\overline{\mu(B)} = \mathbf{M}\mu(gA)\,\overline{\mu(gB)}.$$

Лемма 2. *Пусть μ — σ-аддитивная инвариантная мера. Существует постоянная $\varkappa$ такая, что $\mathbf{M}\,|\mu(A)|^2 < \varkappa$ для любого $A \in \mathfrak{B}$.*

Достаточно доказать лемму для открытых множеств из $\mathfrak{B}$. Пусть лемма неверна. Тогда найдется множество A сколь угодно малого диаметра, имеющего внутренние точки, такое, что $\mathbf{M}\,|\mu(A)|^2$ как угодно велико (ведь для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение сферы на конечное число множеств из алгебры $\mathfrak{B}$ диаметра меньше ε). Так как мера инвариантна, то существует последовательность вложенных множеств A_n, пересечение которых состоит не более, чем из одной точки (т. е. содержится в $\mathfrak{B}$), таких, что $\mathbf{M}\,|\mu(A_n)|^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Это противоречит σ-аддитивности меры.

Из леммы 2 следует, что σ-аддитивная инвариантная мера задает обобщенное поле $\xi(f) = \int f d\mu$ (очевидно, изотропное). Возникает вопрос, когда обобщенное изотропное поле $\xi(f)$ может быть представлено в виде $\xi(f) = \int f(x)\,\mu(dx)$, где μ-аддитивная инвариантная мера? На этот вопрос отвечает

Теорема 2. 1°. *Если в спектральном разложении $\xi(x, \omega)$ нормы коэффициентов ξ_m^l ограничены: $\mathbf{M}\left|\xi_m^l\right|^2 = a_m < c$, то поле ξ задается интегралом по некоторой инвариантной σ-аддитивной мере.*

2°. *Нормы коэффициентов спектрального разложения поля $\int f d\mu$, где μ — инвариантная σ-аддитивная мера, ограничены.*

3°. *Если, с вероятностью 1, для всех $f \in K$ имеет место равенство $\int f d\mu = \int f d\nu$, то, с вероятностью 1, $\mu(A) = \nu(A)$ для любого $A \in \mathfrak{B}$, следовательно, для любого измеримого A.*

Доказательство. 1°. Пусть L_S^2 — пространство функций на сфере таких, что $\int_S |f|^2\,dx < \infty$. Если $\mathbf{M}\left|\xi_m^l\right|^2 = a_m < c$, то для любой $f \in L_S^2$ ряд $\xi(f)$, заданный формулой (1), сходится в L_Ω^2, причем если $f_n \to f$ в L_S^2, то $\xi(f_n) \to \xi(f)$ в L_Ω^2. Поэтому если положить $\nu(A) = \xi(I_A)$, где I_A — характеристическая функция измеримого по Лебегу множества A, то $\nu(A)$ — инвариантная σ-аддитивная мера и $\xi(f) = \int f d\mu$ для $f \in K$.

2°. Покажем, что если $\xi(x, \omega)$ — спектральное разложение поля $\xi(f) = \int f(x)\,\mu(dx)$ и μ — σ-аддитивная инвариантная мера, то $\mathbf{M}\left|\xi_m^l\right|^2 = a_m < c < \infty$. В силу леммы 1 $\mathbf{M}\left|\int f(x)\,\mu(dx)\right|^2 < D < \infty$, если $f \in K$ и $|f| < 2$.

Имеет место неравенство (см. [4])

$$[P_m(\cos\theta)]^2 \geqslant \frac{\sin(2m+1)\theta}{(2m+1)\sin\theta}, \quad 0 < \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha.$$

Из которого следует, что существует постоянная $a > 0$ такая, что $\int\limits_S |Y_m^0(x)|\,dx \geqslant a$ при любом m. Поэтому для любого m существует функция $f_m \in K$, $|f_m| \leqslant 2$ такая, что

$$\left|\int\limits_S f_m(x)\, Y_m^0(x)\, dx\right| > \frac{a}{2}\,.$$

Очевидно, $\mathbf{M}\,|\int f_m(x)\,\mu(dx)|^2 = \mathbf{M}\,|\xi(f_m)|^2 \geqslant a^2 a_m/4$, откуда $a_m \leqslant 4D/a^2$.

3°. Из теоремы Стона-Вейерштрасса (см. [5]) следует, что любая непрерывная функция f равномерно приближается бесконечно дифференцируемыми. Значит, для любой непрерывной функции $\int f(x)\,\mu(dx) = \int f(x)\,\nu(dx)$ с вероятностью 1, или, полагая $\lambda(A) = \mu(A) - \nu(A)$, $\int f(x)\,\lambda(dx) = 0$ с вероятностью 1. Поэтому утверждение 3° будет доказано, если будет доказана

Лемма 3. *Если $\lambda(A)$ — случайная σ-аддитивная мера такая, что для любой непрерывной $f(x)$ $\int f(x)\,\lambda(dx) = 0$, то, с вероятностью 1, $\lambda(A) = 0$ для любого $A \in \mathfrak{B}$.*

Докажем лемму для открытых $\mathfrak{B}$-измеримых множеств. Представим открытое $\mathfrak{B}$-измеримое множество A в виде суммы возрастающей последовательности замкнутых $\mathfrak{B}$-измеримых множеств A_n, тогда при $n \to \infty$ $\lambda(A) = \lim \lambda(A_n)$.

Из счетной аддитивности λ следует, что при $n \to \infty$ $\varkappa_n = \sup \mathbf{M}\,|\lambda(A_n')|^2 \longrightarrow 0$, где верхняя грань берется по множествам $A_n' \subseteq A_{n+1} \setminus A_n \in \mathfrak{B}$. Пусть f_n — непрерывная функция, равная 1, если $x \in A_n$, заключенная между 0 и 1, если $x \in A_{n+1} \setminus A_n$, и равная 0 в остальных случаях. Из равенства $\int f(x)\,\lambda(dx) = 0$ следует, что $\lambda(A_n) = -\int\limits_{A_{n+1} \setminus A_n} f_n(x)\,\lambda(dx)$.

По лемме 1 $\mathbf{M}|\lambda(A_n)|^2 \leqslant 32\,\varkappa_n \to 0$ при $n \to \infty$, откуда вытекает, что при $n \to \infty$ $\lambda(A) = \text{l.i.m.}\,\lambda(A_n) = 0$.

Замечание. С вероятностью 1 имеет место равенство $\mu(A) = \xi(I_A)$, где $\xi(\varphi)$ определяется формулой (1) и $\xi_m^l(\omega) = \int Y_m^l(x)\,\mu(dx)$.

Если $\xi(x, \omega)$ — обыкновенное (необобщенное) случайное поле, т. е. соответствующий ряд сходится в L_Ω^2 при каждом $x \in S$, то $\mu(A) = \int\limits_A \xi(x, \omega)\,dx$. Поэтому обобщенное поле ξ можно условно называть плотностью меры μ по неслучайной лебеговой мере $L(A) = \int\limits_A dx$

Поступила в редакцию
29.12.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений трехмерного пространства, Успехи матем. наук, **VII**, 1 (1952), 3—117.
[2] К. Ито, Стационарные случайные распределения. Математика, сб. пер. **1**, 3, (1957), 139—151.
[3] А. М. Обухов, Статистически однородные поля на сфере, Успехи матем. наук. **II**, 2 (18) (1947), 196—198.
[4] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
[5] К. Люмис, Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.
[6] Ю. А. Розанов, Спектральный анализ абстрактных функций, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 3 (1959), 291—310.

LES MESURES ALÉATOIRES INVARIANTES SUR LA SPHÈRE

V. N. TUTUBALIN (*MOSCOU*)

(Résumé)

Considerons une mesure aléatoire μ sur la sphere S. On appelle la mesure μ invariante, si

$$\mathbf{M}\,\mu(A)\,\mu(B) = \mathbf{M}\,\mu(gA)\,\overline{\mu(gB)}$$

pour toute rotation g de la sphére:

On a demontré la formule suivante:

$$\mu(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} \xi_m^l \int_S \overline{Y_m^l(x)}\, I_A(x)\, dx,$$

ou ξ_m^l sont les variables aléatoires, $\mathbf{M}\,\xi_m^l \xi_{m_1}^{l_1} = 0$, si $l \neq l_1$ ou $m \neq m_1$,

$$\mathbf{M}\,|\xi_m^{-m}|^2 = \mathbf{M}\,|\xi_m^{-m+1}|^2 = \ldots = \mathbf{M}\,|\xi_m^m|^2 \quad a_m,$$
$$0 \leqslant a_m \leqslant c < \infty;$$

$Y_m^l(x)$ sont les fonctions sphériques:

$$I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} A, \\ 1, & x \in A; \end{cases}$$

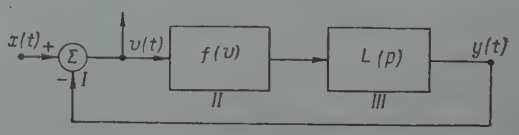
x est un élém ent d'aire.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Э. М. ХАЗЕН

В работе рассматриваются системы, содержащие нелинейные функциональные преобразователи, разделенные линейными фильтрами с дробно-рациональным спектром. Для определения статистических характеристик случайного процесса на выходе системы строится многомерный марковский процесс и применяются уравнения Колмогорова. Полученные точные результаты для конкретной системы сравниваются с результатами приближенного метода статистической линеаризации.

1. Постановка задачи. Рассматриваются системы с обратной связью следующего вида:



(1)

где $x(t)$ — случайный процесс на входе; III — линейный фильтр, заданный оператором $L(p) = \dfrac{Q_m(p)}{P_n(p)}$; Q_m, P_n — многочлены степени m, n; $p = \dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; II — нелинейное безынерционное устройство, задаваемое функцией $f(v)$, дифференцируемой $m+2$ раз; I — сумматор такой, что $v(t) = x(t) - y(t)$.

Процесс на выходе $v(t)$ для данной системы удовлетворяет следующему уравнению:

$$v(t) = x(t) - L(p)\, f[v(t)]. \tag{2}$$

ли $n > m$, то, как известно [2], уравнение (2) эквивалентно

$$v(t) = x(t) - \int_0^t G(t-\tau)\, f[v(\tau)]\, d\tau. \tag{3}$$

ли $x(t)$ n раз дифференцируем, то

$$P_n\left(p\right) v(t) = P_n\left(p\right) x(t) - Q_m\left(p\right) f[v(t)]. \tag{4}$$

В дальнейшем будет предполагаться, что

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_0, \\ m(t) + \xi(t), & t > t_0, \end{cases}$$

де $m(t)$ — заданная функция времени, $\xi(t)$ — гауссовский стационарный процесс с робно-рациональной спектральной плотностью.

Задача заключается в том, чтобы определить одномерную плотность распределения моменты случайной функции $v(t)$.

2. Построение многомерного марковского процесса. Определение плотности распределения вероятностей. Уравнение (4) определяет случайный процесс $v(t)$, который жно рассматривать как компоненту многомерного марковского процесса. Действительно, пусть спектральная плотность процесса $x(t)$ равна

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|(i\lambda)^s + \beta_1 (i\lambda)^{s-1} + \ldots + \beta_s|^2}{|(i\lambda)^k + \alpha_1 (i\lambda)^{k-1} + \ldots + \alpha_k|^2}, \qquad k > n + s.$$

огда в соответствии с [7]

$$\begin{aligned} d\eta_1^{(0)} &= \eta_1^{(1)}\, dt; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ d\eta_1^{(k-2)} &= \eta_1^{(k-1)}\, dt; \\ d\eta_1^{(k-1)} &= [-\alpha_1 \eta_1^{(k-1)} - \alpha_2 \eta_1^{(k-2)} - \ldots - \alpha_k \eta_1^{(0)}]\, dt + d\zeta(t); \\ x(t) &= \eta_1^{(s)} + \beta_1 \eta_1^{(s-1)} + \ldots + \beta_s \eta_1^{(0)}; \end{aligned} \tag{5}$$

де $\zeta(t)$ — винеровский процесс. В (4) $x(t)$ и $P_n\left(p\right) x(t)$ можно заменить линейными омбинациями $\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_1^{(n+s)}$. Присоединяя (4) к системе (5), получим для $v(t)$ систему уравнений первого порядка. Обозначив

$$P_n(p) = b_0 + b_1 p + \ldots + b_{n-1} p^{n-1} + 1, \quad Q_m(p) = a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^m,$$

$$v(t) = y_1, \quad P_n\left(p\right) x(t) = \sum_{k=0}^{n+s} d_k \eta_1^{(k)},$$

олучим

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ dy_{n-2} &= y_{n-1} dt; \\ dy_{n-1} &= \left[-b_0 y_1 - b_1 y_2 - \ldots - b_{n-1} y_n + a_0 f(y_1) + a_1 \frac{df(y_1)}{dy_1} y_2 + \right. \\ &\quad \left. + a_2 \frac{d^2 f(y^2)}{dy_1^2} (y_2)^2 + a_2 \frac{df(y_1)}{dy_1} y_3 + \ldots + \sum_{k=0}^{n+s} d_k \eta_1^{(k)}\right] dt; \\ d\eta_1^{(0)} &= \eta_1^{(1)} dt; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ d\eta_1^{(k-1)} &= [-\alpha_1 \eta_1^{(k-1)} - \alpha_2 \eta_1^{(k-2)} - \ldots - \alpha_k \eta_1^{(0)}]\, dt + d\zeta(t). \end{aligned}$$

В общем виде эту систему можно записать как

$$dy_i = F_i(y_1, \ldots, y_N)\,dt + a_i d\zeta(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6}$$

Уравнения (6) определяют марковский процесс $(y_1(t), \ldots, y_N(t))$: условное распределение вероятностей для него при условии, что известны $y_i(\tau)\,(i = 1, \ldots, N)$ при $\tau \leqslant t$ зависит только от значений $y_i(t_0) = y_i^0$, так как

$$y_i(t) = y_i^0 + \int_{t_0}^{t} F_i(y_1, \ldots, y_N)\,d\tau + a_i[\zeta(t) - \zeta(t_0)],$$

где $\zeta(t) - \zeta(t_0)$ не зависит от прошлого до момента t_0.

Если $F_i(y_1, \ldots, y_N)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\| \vec{F}(y_1', \ldots, y_N') - \vec{F}(y_1, \ldots, y_N) \| \leqslant K \| \vec{y}' - \vec{y} \|, \quad K = \text{const} > 0^*,$$

то почти все выборочные функции $(y_1(t), \ldots, y_N(t))$ непрерывны. Найдем локальные характеристики процесса $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_N)$:

а) среднее смещение из заданной точки за малое время Δt

$$\mathbf{M}\left[(y_i(t + \Delta t) - y_i(t))\Big|_{\vec{y}(t) = \vec{x}}\right] =$$

$$= F_i(x_1, \ldots, x_N)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

б) корреляция смещений в разных направлениях

$$\mathbf{M}\left[(y_i(t + \Delta t) - y_i(t))(y_j(t + \Delta t) - y_j(t))\Big|_{\vec{y}(t) = \vec{x}}\right] = a_i a_j \Delta t + o(\Delta t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N$$

Из результатов работ [1, 3—9] вытекает, что если $F_i(y_1, \ldots, y_N)$ таковы, что существуют

$$\frac{\partial F_i(y_1, \ldots, y_N)}{\partial y_k} \quad (i, k = 1, \ldots, N)$$

и эти производные удовлетворяют условию Липшица и ограничены, то плотность распределения вероятностей $P(y_1, \ldots, y_N; t)$ для процесса $(y_1(t), \ldots, y_N(t))$ (система (6)) удовлетворяет уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial P(y_1, \ldots, y_N; t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_k}[F_k \cdot P] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_i a_j \frac{\partial^2 P}{\partial y_i \partial y_j}. \tag{7}$$

Для нахождения стационарного распределения надо положить $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$.

Если $F_i(y_1, \ldots, y_N)$ — кусочно-гладкие функции (быть может, разрывные), то в каждой из областей, где все F_i удовлетворяют условию (7), $P(y_1, \ldots, y_N; t)$ удовлетворяет соответствующему уравнению (8). Условия на границе различных областей зададим, исходя из требований, чтобы: 1) $P(y_1, \ldots, y_N, t)$ была непрерывна во всем пространстве значений $(y_1, \ldots, y_N)$, 2) для любого объема Ω было выполнено уравнение неразрывности

$$-\frac{d}{dt}\int \ldots \int P(y_1, \ldots, y_n; t)\,d\Omega = \int \ldots \int_S \varphi_n dS_n \tag{9}$$

---

* Здесь $\|\vec{y}\| = \max(y_1, \ldots, y_N)$. Для выполнения этого условия в некоторой выпуклой области R значений $(y_1, \ldots, y_N)$ достаточно, например, чтобы все первые частные производные функций $F_1, \ldots, F_N$ были непрерывны и ограничены в R.

десь Ω — объем, ограниченный поверхностью S: dS_n — элемент поверхности с нор-
алью $\vec{n}$, направленной внутрь Ω; φ_n — плотность потока P в направлении $\vec{n}$). Требова-
ие 2), обусловленное отсутствием поглощающих или испускающих точек для процесса
$y_1, \ldots, y_N$) равносильно требованию непрерывности плотности потока P через границу.
айдем выражение для плотности потока P в данном направлении, если P удовлетво-
яет уравнению (8). Из (9) ввиду произвольности Ω по теореме Стокса

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi_{y_i}}{\partial y_i} = 0,$$

де φ_{y_i} — плотность потока в направлении y_i. Сравнивая последнее уравнение с (8),
олучим

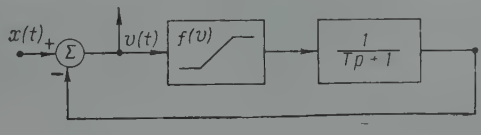
$$\varphi_{y_i} = F_i P - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} a_i a_j \frac{\partial P}{\partial y_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

тметим, что линейной заменой переменных можно сделать любое направление одним
з координатных.

Аналогичным образом можно построить многомерный марковский процесс в случае
роизвольного числа нелинейных элементов в схеме (1).

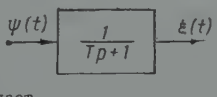
Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим частный случай схемы (1):



$$f(v) = \begin{cases} B, & v > A \\ \dfrac{B}{A} v, & |v| \leqslant A \\ -B, & v < -A \end{cases}, \quad x(t) = m(t) + \xi(t);\ m(t) = m < A.$$

(t) — стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f_\xi(\lambda) =$
$= \dfrac{\lambda_0}{2\pi} \left| \dfrac{1}{1 + i\lambda T} \right|^2$. Процесс $\xi(t)$ можно получить в результате прохождения белого
шума $\psi(t)$ через фильтр, заданный оператором $L(p) = \dfrac{1}{1 + Tp}$:



равнение (4) в данном случае дает

$$dv = -\frac{1}{T} v dt - \frac{1}{T} f(v)\, dt + \frac{m}{T}\, dt + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{T}\, d\zeta(t),$$

де $\zeta(t)$ — винеровский процесс. Уравнения для плотности $P(v, t)$ в силу (8) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{m - v - B}{T} P\right\} = \frac{\lambda_0}{2T^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad v > A \\ &\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{m - v - (B/A)v}{T} P\right\} = \frac{\lambda_0}{2T^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad |v| < A \\ &\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{m - v + B}{T} P\right\} = \frac{\lambda_0}{2T^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad v < -A. \end{aligned} \tag{10}$$

При нахождении стационарного распределения вероятностей $P(v)$ уравнения (10) превращаются в обыкновенные, общие решения которых нетрудно найти. Граничные условия в точках A, $-A$ в данном случае таковы:

1) непрерывность $P(v)$;

2) непрерывность потока $P(v)$

$$\left[\frac{m-v-B}{T}P(v)-\frac{\lambda_0}{2T^2}\frac{dP}{dv}\right]_{v=A+0}=\left[\frac{m-v(1+B/A)}{T}P(v)-\frac{\lambda_0}{2T^2}\frac{dP}{dv}\right]_{v=A-0},$$

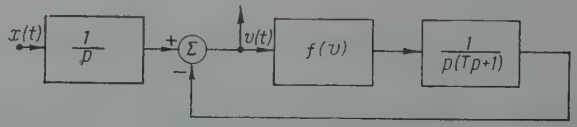
$$\left[\frac{m-v+B}{T}P(v)-\frac{\lambda_0}{2T^2}\frac{dP}{dv}\right]_{v=-A-0}=\left[\frac{m-v(1+B/A)}{T}P(v)-\frac{\lambda_0}{2T^2}\frac{dP}{dv}\right]_{v=-A+0},$$

что сводится к непрерывности $\frac{dP}{dv}$ в точках A, $-A$. Кроме того, должно быть $P(v)\geqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(v)\,dv=1$. Решение уравнений (10), удовлетворяющее всем этим условиям, равно

$$P(v)=\begin{cases} C\exp\left\{-\dfrac{(v+B-m)^2T}{\lambda_0}+\dfrac{(B-m)^2T}{\lambda_0}\right\}, & v>A,\\ C\exp\left\{-\dfrac{ABT}{\lambda_0}-\dfrac{(1+B/A)T}{\lambda_0}\left(v-\dfrac{m}{1+B/A}\right)^2+\dfrac{m^2T}{\lambda_0(1+B/A)}\right\}, & |v|\leqslant A,\\ C\exp\left\{-\dfrac{(v-B-m)^2T}{\lambda_0}+\dfrac{(B+m)^2T}{\lambda_0}\right\}, & v<-A \end{cases} \tag{11}$$

(константа C определена из условия нормировки).

Пример 2. Рассмотрим схему, несколько отличную от (1).



$$f(v)=\begin{cases} 1, & v\geqslant 1;\\ v, & |v|<1;\\ -1, & v\leqslant -1; \end{cases}$$

$x(t)$ — стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $\frac{\delta}{2\pi|(1+a_1i\lambda)(1+a_2i\lambda)|^2}$, который можно получить в результате прохождения белого шума $\psi(t)$ через фильтр, заданный оператором $L(p)=\frac{1}{(1+a_1p)(1+a_2p)}$.

Уравнение (2) имеет вид $p(Tp+1)v(t)=(Tp+1)x(t)-f(v)$ и

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{T}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{T}f(v)=\frac{dx}{dt}+\frac{1}{T}x. \tag{12}$$

$\left(\text{Обозначим } \frac{dx}{dt}+\frac{1}{T}x=\eta\right)$. К этому уравнению можно применить изложенную выше теорию, сделав следующие замечания.

Уравнение Колмогорова (8) для плотности распределения вероятностей $P(y_1,\ldots,y_N,t)$ остается справедливым приближенно в том случае, когда вместо винеровского

процесса $\xi(t)$ в систему (6) входит процесс $\xi_1(t) = \int_{t_0}^{t} \eta(\tau)\, d\tau$, где $\eta(\tau)$ — такой гауссовский стационарный процесс, что $\eta_1(t_1)$, $\eta_1(t_2)$ можно считать независимыми при $|t_1 - t_2| > \tau_0$, где τ_0 достаточно мало. (Это следует из возможности вывода уравнения (8), соответствующего системе (6), с помощью предельного перехода от процесса с дискретным множеством состояний, в каждом из которых точка η_n находится в течение времени τ_n, к процессу с непрерывным множеством состояний при $\tau_n \to 0$.) Поэтому достаточно широкополосные гауссовские процессы, у которых время τ_0 мало по сравнению с естественными временными масштабами исследуемой системы, можно заменять белыми шумами.

В уравнение (12) входит гауссовский процесс $\eta(t)$ со спектральной плотностью $\frac{\delta}{2\pi}\left|\frac{i\lambda + \frac{1}{T}}{(1 + a_1 i\lambda)(1 + a_2 i\lambda)}\right|^2$. Время установления переходных процессов в системе (12), примерно, равно $3T$. Пусть a_1, a_2 достаточно малы, так что для процесса $\eta(t)$ $\tau_0 \ll T$. Заменим $\eta(t)$ белым шумом $\eta_1(t)$ с корреляционной функцией $\mathbf{M}\{\eta_1(t)\,\eta_1(t+\tau)\} = \lambda_0 \delta(\tau)$. Определим величину λ_0. Дисперсия $x(t)$ равна $\sigma_x^2 = \frac{\delta}{2(a_1 + a_2)}$. С другой стороны, можно считать, что

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} x(t) = \eta_1(t), \qquad (13)$$

так как τ_0 мало по сравнению со временем установления для системы, заданной уравнением (13). Из (13) следует, что $\sigma_x^2 = \frac{\lambda_0 T}{2}$. Отсюда найдем $\lambda_0 = \frac{\delta}{(a_1 + a_2) T}$.

Пусть теперь

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{T}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{T} f(v) = \eta_1(t).$$

Тогда из уравнений типа (8), учитывая наши граничные условия, нетрудно найти стационарное распределение вероятностей $P(y_1, y_2)$, где $y_1 = v(t)$, $y_2 = \frac{dv}{dt}$:

$$P(y_1, y_2) = \begin{cases} c_1 \exp\left\{-\frac{1}{T\lambda_0}\left(y_2^2 + \frac{2}{T} y_1\right)\right\}, & y_1 > 1, \\ c_2 \exp\left\{-\frac{1}{T\lambda_0}\left(y_2^2 + \frac{1}{T} y_1^2\right)\right\}, & |y_1| \leqslant 1, \\ c_3 \exp\left\{-\frac{1}{T\lambda_0}\left(y_2^2 - \frac{2}{T} y_1\right)\right\}, & y_1 < -1. \end{cases} \qquad (14)$$

Константы c_1, c_2, c_3 определяются из условия непрерывности $P(y_1, y_2)$ при $y_1 = \pm 1$ и условия нормировки.

Формула (14), где $\lambda_0 = \frac{2\sigma_x^2}{T}$, справедлива для любого процесса $x(t)$, для которого процесс с $\eta_1(t) = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{T} x$ имеет $\tau_0 \ll T$. Величину τ_0 для гауссовского процесса можно, примерно, оценить следующим образом:

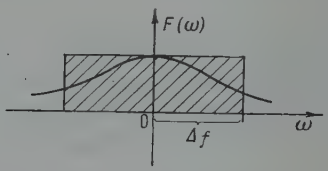
$$\tau_0 = \frac{\int_0^\infty B(\tau)\, d\tau}{B(0)},$$

где $B(\tau)$ — корреляционная функция процесса. Или, учитывая, что

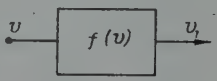
$$B(0) = 2\int_0^\infty F(\omega)\,d\omega, \quad \int_0^\infty B(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}F(0),$$

где $F(\omega)$ — спектральная плотность процесса, симметричная относительно точки $\omega = 0$, получим

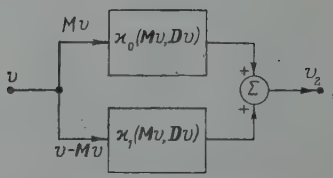
$$\tau_0 = \frac{F(0)}{2\int_0^\infty F(\omega)\,d\omega} = \frac{1}{2\pi\Delta f}.$$



3. Сравнение метода статистической линеаризации и точного метода. Для приближенного определения среднего значения и дисперсии функции $v(t)$ системы (1) нелинейный элемент



заменяется следующим



$$v_2 = \varkappa_0 \cdot \mathbf{M}v + \varkappa_1 \cdot (v - \mathbf{M}v), \quad (15)$$

где $\mathbf{M}v$ — среднее значение, $\mathbf{D}v$ — дисперсия $v(t)$. Коэффициенты $\varkappa_0 = \varkappa_0(\mathbf{M}v, \mathbf{D}v)$, $\varkappa_1(\mathbf{M}v, \mathbf{D}v)$ выбираются в зависимости от $\mathbf{M}v$, $\mathbf{D}v$ так, чтобы

$$\mathbf{M}v_1 \approx \mathbf{M}v, \quad \mathbf{D}v_1 \approx \mathbf{D}v. \quad (16)$$

Система, получившаяся из (1) после замены (15), называется линеаризованной.

Линеаризация (15) предложена Бутоном и Казаковым [10] и называется статистической.

Функции $\varkappa_0(\mathbf{M}v, \mathbf{D}v)$, $\varkappa_1(\mathbf{M}v, \mathbf{D}v)$ выбирают из условия, чтобы равенства (16) были точными для гауссовского процесса с тем же средним значением и дисперсией, что $v(t)$, или из условия минимума $\mathbf{M}[v_1 - v]^2$ для гауссовского $v(t)$. В большинстве случаев нелинейные элементы системы разделены инерционными линейными, и процесс на входе нелинейного элемента мало отличается от гауссовского. Однако, так как даже точное выполнение условия (16) или условия минимума $\mathbf{M}[v_1 - v]^2$ не обеспечивает точного совпадения корреляционных функций $R_{v_1}(t_1, t_2)$, $R_v(t_1, t_2)$, то метод определения первых двух моментов с помощью статистической линеаризации является принципиально приближенным.

Для системы из примера 1 п. 2 проведено сравнение результатов вычисления точным методом и методом статистической линеаризации, давшее хорошее совпадение. Определялись среднее значение и дисперсия стационарного процесса $v_1 = f(v)$. Приведем таблицу результатов вычислений.

λ_0	m	Среднее значение		Дисперсия	
		точный метод	метод стат. лин.	точный метод	метод стат. лин.
0,5	0,5	0,2500	0,2500	0,0208	0,0208
	1,5	0,7485	0,7480	0,0195	0,0193
	2,0	0,9522	0,9520	0,00635	0,0066
1	0,5	0,2500	0,2500	0,08268	0,0833
	1,5	0,7284	0,7360	0,0591	0,0670
	2,0	0,9047	0,9070	0,02539	0,0267
2	0,5	0,2333	0,2360	0,2778	0,2790
	1,5	0,6527	0,6590	0,1725	0,1770
	2,0	0,8090	0,8140	0,1019	0,1060
5	0,5	0,1503	0,1540	0,6666	0,6770
	1,5	0,4316	0,4430	0,5443	0,5530
	2,0	0,5563	0,5670	0,4594	0,4600
10	0,5	0,0842	0,0898	0,8364	0,8790
	1,5	0,2582	0,2650	0,8083	0,8210
	2,0	0,3371	0,3490	0,7446	0,7620

Автор глубоко благодарен Андрею Николаевичу Колмогорову за руководство и внимание к его работе.

Поступила в редакцию
18.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, УМН, V (1938), 5—41.
[2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, II. ГИТТЛ, М. — Л., 1951.
[3] В. Феллер, К теории стохастических процессов, УМН, V (1938), 57—96.
[4] Dressel, Duke Math. Journal, 7, 186; 12, 61.
[5] К. Ито, Стохастические дифференциальные уравнения, Математика, 1, 2 (1957).
[6] Г. Маруяма, Непрерывные стохастические процессы, Математика, 1,1 (1957).
[7] J. L. Doob, The elementary Gaussian processes, Ann. Math. Stat., 15 (1944), 229 — 282.
[8] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М, 1956.
[9] R. Fortet, Les fonctions aléatoires du type de Markoff, associées à certaines équations lineaires aux dérivées partielles du type parabolique, J. Math. Pures appl. 22 (1943), 177 — 243.
[10] И. Е. Казаков, Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных автоматических систем, Автоматика и телемеханика, 5 (1956), 385 — 409.

EVALUATION OF THE SINGLE-DIMENSIONAL PROBABILITY DENSITY OF RANDOM PROCESS IN THE OUTPUT OF A NONLINEAR SYSTEM

E. M. KHASEN (*MOSCOW*)

(*Summary*)

This paper considers nonlinear systems with feed-back. These systems contain nonlinear functional reformers, which are separated by linear filters with rational spectra.

In order to evaluate the single-dimensional probability density and the moments of a random process in the output of the system, a multi-dimensional random Markov process is constructed, and the Kolmogorov diffusional equations are employed.

The exact results obtained by using this method are compared with the results of an approximate «statistical linearization» approach for one system. The two sets of results are found to agree well.

НОМОГРАММА ДЛЯ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ χ^2

С. В. СМИРНОВ, М. К. ПОТАПОВ

В заметке [1] была построена номограмма для функции вероятности χ^2:

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi}^{\infty} z^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \qquad (1$$

по таблицам Е. Е. Слуцкого [2] в полном их объеме. Пользование этой номограммой требует предварительных вычислений и поэтому не всегда удобно. В заметке [1] для малой области изменения n и χ^2 ($1 \leqslant n \leqslant 30$, $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 30$) оказалось возможным построить номограмму непосредственно для функции (1). В этой заметке предлагается номограмма также непосредственно для функции вероятности χ^2, но в гораздо большей области изменения n и χ^2 ($1 \leqslant n \leqslant 110$, $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 150$). Номограмма построена теми же методами, что и номограмма в заметке [1]. Отметим, что область изменения n и χ^2 шире, чем в таблицах Пирсона [3], но точность ответов, получаемых по номограмме, естественно, хуже, чем точность ответов по таблицам. В средней части ответной шкалы P номограммы при $0{,}1 \leqslant P \leqslant 0{,}9$ ответ дается с точностью до $^1/_3$ единицы второго знака, что влечет относительную погрешность для P и $1 - P$ не выше 3%. В концевых частях шкалы ответ дается с большим числом знаков, что влечет, даже с учетом округления при сравнении таблиц и номо-

χ^2	$n=1$		$n=5$		$n=10$	
	P_N	P	P_N	P	P_N	P
1	0.317	0.3173	0.967	0.9626		
5	0.025	0.0254	0.417	0.4159	0.893	0.8912
10	0.0016	0.0016	0.075	0.0752	0.441	0.4405
20			0.0013	0.0013	0.029	0.0292

χ^2	$n=30$		$n=50$		$n=70$	
	P_N	P	P_N	P	P_N	P
20	0.917	0.9165				
30	0.467	0.4657	0.989	0.9888		
40	0.105	0.1049	0.845	0.8435	0.9985	0.9985
50	0.112	0.1124	0.475	0.4734	0.966	0.9662
60			0.157	0.1572	0.797	0.7973
70			0.032	0.0324	0.477	0.4775
80			0.0045	0.0045	0.194	0.1939
90					0.053	0.0541
100					0.011	0.0103

χ^2	$n=80$		$n=90$		$n=100$		$n=110$	
	P_N	P	P_N	P	P_N	P	P_N	P
50	0.9967	0.9966						
60	0.954	0.9537	0.994	0.9937				
70	0.780	0.7802	0.942	0.9415	0.990	0.9902	0.999	0.9989
80	0.480	0.4790	0.766	0.7657	0.930	0.9298	0.985	0.9860
90	0.208	0.2082	0.480	0.4802	0.752	0.7532	0.915	0.9185
100	0.065	0.0648	0.220	0.2210	0.478	0.4812	0.742	0.7423
120	0.0025	0.0026	0.019	0.0190	0.083	0.0845	0.240	0.2422
140					0.005	0.0051	0.028	0.0283
150							0.006	0.0068

граммы, погрешность не выше 10% в самом худшем случае. Выше приводится сравнитель ная таблица значений P, взятых из таблиц Е. Е. Слуцкого [2], и значений P_N, снятых с номограммы.

Для облегчения повторного вычерчивания номограммы приведем уравнение шкалы P и координаты опорных точек шкал n и χ^2, построенных графически.

Уравнение шкалы P: $\xi = 0$, $\eta = 0{,}252 \cdot G(P)$, где $G(P)$ — функция, обратная к функции

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\eta} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Координаты опорных точек:

Шкала n			Шкала χ^2		
n	η	ξ	χ^2	η	ξ
1	0.792	1	1	0.603	0.792
10	0.514	1	5	0.466	0.745
20	0.314	1	10	0.357	0.724
30	0.148	1	20	0.154	0.697
40	0.000	1	30	0.098	0.681
50	—0.136	1	40	—0.006	0.671
60	—0.264	1	50	—0.098	0.664
70	—0.382	1	60	—0.182	0.657
80	—0.496	1	80	—0.323	0.649
90	—0.605	1	100	—0.455	0.648
100	—0.708	1	120	—0.578	0.633
110	—0.809	1	150	—0.745	0.621

Поступила в редакцию
26.2.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Смирнов, М. К. Потапов, Номограмма для неполной Г-функции и функции вероятности χ_2. Теория вероят. и ее примен., **I**, 4 (1957).

[2] Е. Е. Слуцкий, Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности χ^2, М.— Л., 1950.

[3] K. Pearson. Tables for the Incomplete Γ-Function, London, 1922.

NOMOGRAM FOR PROBABILITY FUNCTIONS χ^2

S. V. SMIRNOV, M. K. POTAPOV (MOSCOW)

(*Summary*)

In this paper a nomogram is constructed for the function

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi}^{\infty} z^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

or the variables P, χ^2, n lying within the following limits:

$$1 \leqslant n \leqslant 110,\ 1 \leqslant \chi^2 \leqslant 150,\ 0{,}001 \leqslant P \leqslant 0{,}999.$$

The relative error in the middle part of the answer scale of P does not exceed 3% for $0{,}1 \leqslant P \leqslant 0{,}9$ and 10% at the ends of this scale.

ИНФОРМАЦИЯ О VI СОВЕЩАНИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

С 5 по 10 сентября 1960 в г. Вильнюсе происходило VI Совещание по теории вероятностей и математической статистике, организованное Академией наук Литовской ССР Вильнюсским Государственным Университетом им. В. Капсукаса и Математическим институтом им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. По окончании совещания в Паланге состоялся Коллоквиум по распределениям в бесконечномерных пространствах (12—14 сентября).

По сравнению с V Совещанием (1958) количество участников почти удвоилось. Соответственно возросло количество заявок на доклады и краткие сообщения. Поэтому на Совещании в Вильнюсе впервые наряду с пленарными заседаниями проводились секционные.

На Коллоквиуме в Паланге обсуждались вопросы, пограничные между теорией вероятностей и функциональным анализом. Специалисты обоих направлений нашли весьма полезным имевший место обмен мнениями и выразили желание периодически повторять подобные встречи.

Прекрасная организация деловой части Совещания и Коллоквиума (заслуга в первую очередь Председателя Оргкомитета И. П. Кубилюса и Ученого Секретаря Оргкомитета В. А. Статулявичуса) дополнялась интересными экскурсиями по Литве, оставившими у всех яркие воспоминания.

Ниже приводятся программы пленарных и секционных заседаний Совещания и Коллоквиума *.

Понедельник, 5 сентября

Утреннее заседание

Открытие совещания

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. *Линник Ю. В., Петров В. В., Статулявичус В. А., Золотарев В. М.*, Новые предельные теоремы для независимых случайных величин и цепей Маркова с учетом больших отклонений.

2. *Прохоров Ю. В., Мешалкин Л. Л., Рогозин Б. А.* Экстремальные задачи в предельных теоремах.

---

*В программе Совещания не отмечены некоторые перестановки докладов и сообщений, произведенные по техническим причинам. Звездочка (*) означает, что доклад не был прочитан.

3. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Статулявичус В. А.* | *Леонов В. П.* |, *Ряуба Б. А.*, Предельные теоремы для слабо зависимых величин.

Вечерние заседания

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. *Петров В. В.*, Асимптотические разложения для производных функций распределения суммы независимых случайных величин.

2. *Бобров А. А., Аров Д. З.*, О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых слагаемых.

3. *Сираждинов С. Х.*, Некоторые уточнения предельных теорем о больших уклонениях.

4. *Скороход А. В.*, Уточнения некоторых предельных теорем для сумм случайных величин.

5. *Емельянов Г. В.*, О локальных предельных теоремах для плотностей.

6* *Золотарев В. М.*, Некоторые теоремы о больших уклонениях.

7. *Боровков А. А.*, О распределении величины первого перескока.

8. *Королюк В. С.*, О методе построения асимптотических разложений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. *Фролов А. С., Ченцов А. Н.*, Использование зависимых испытаний в методе Монте Карло для получения гладких кривых.

2. *Красулина Т. П.*, О стохастической аппроксимации.

3*. *Митропольский А. К.*, О кривой распределения возраста советских математиков.

4. *Митрофанова Н. М.*, Об одной непараметрической задаче Махаланобиса.

5. *Каган А. М.*, Некоторые свойства оценок максимального правдоподобия.

6. *Бендерский Я. М.*, Статистические методы определения средней цены изделия и сортности продукции.

7. *Смирнов Н. В.*, Вероятности больших отклонений эмпирической функции распределения.

8*. *Кутай А. К.*, Об оценке погрешностей технических измерений.

9. *Большев Л. Н.*, О доверительных зонах для функций нормального распределения.

10. *Мания Г. М.*, Квадратическая оценка расхождения плотностей двумерного нормального распределения по данным выборки.

Вторник, 6 сентября

Утреннее заседание

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

1. *Дынкин Е. Б.*, Обзор некоторых направлений в теории марковских процессов.

2. *Вентцель А. Д., Серегин Л. В., Шур М. Г.*, Гармонические и супергармонические функции, связанные с марковскими процессами.

3. *Гирсанов И. В., Скороход А. В., Фрейдлин М. И.*, Стохастические дифференциальные уравнения Ито и некоторые их приложения.

Вечерние заседания

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

1 *Колмогоров А. Н., Ширяев А. Н.*, Применения марковских процессов к обнаружению разладки производственного процесса.

2. *Благовещенский Ю. Н.*, О диффузионных процессах с малой дисперсией.

3. *Севастьянов Б. А.*, Предельные теоремы для ветвящихся процессов с диффузией.

4. *Хасьминский Р. З.*, Вероятностное решение некоторых дифференциальных уравнений.

5. *Юшкевич А. А.*, К определению строго марковского процесса.

6. *Вентцель А. Д.*, О плотностях вероятностей перехода одномерных диффузионных процессов.

7. *Дынкин Е. Б., Малютов М.*, Случайное блуждание на группах с конечным числом образующих.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. *Волков И. С.*, Предельные теоремы для больших отклонений в случае конечной цепи Маркова.

2. *Тутубалин В. Н.* Предельные теоремы для плоскости и пространства Лобачевского.

3. *Боровков А. А.*, Асимптотические разложения и большие уклонения в задаче о двух выборках.

4. *Алешкевичене А. К., Миталаускас А. А., Вилкаускас Л. Л.*, Локальные предельные теоремы для сходимости сумм независимых и марковских случайных величин к устойчивому закону. Многомерные предельные теоремы с учетом больших уклонений.

5. *Кубилюс И. П.*, О некоторых задачах вероятностной теории чисел.

6. *Уждавинис Р. В.*, К вопросу о распределении аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов.

7. *Постникова Л. П.*, К вопросу о понятии коллектива Мизеса.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. *Бородачев Н. А.*, О математических представлениях закономерностей производственных процессов при комплексной автоматизации.

2. *Картвелишвили Н. А.*, Приложения теории вероятностных процессов в эксплуатации и проектированию энергетических систем.

3. *Тимофеев Д. В., Фролов А. С.*, Применение метода статистических испытаний к расчету некоторых режимов электрических систем.

4. *Халфин Л. А.*, К статистической теории спектральных приборов.

5. *Яглом И. М.*, Оценки для вероятностей сложных событий.

6. *Маневич Д. В., О* повторениях групп событий в схемах с переменными вероятностями.

7. *Свешников А. А.*, Вероятностные методы исследования волнения моря и качки корабля.

8. *Екимов В. В.*, Приложение вероятностных методов в караблестроении.

Среда, 7 сентября

Утреннее заседание

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

1. *Добрушин Р. Л., Пинскер М. С.* Теория оптимального кодирования.

2. *Добрушин Р. Л., Михалевич В. С., Пинскер М. С., Скороход А. В.*, Применения энтропии в статистике случайных процессов.

3. *Овсеевич И. А., Пинскер М. С., Цыбиков Б. С.*, Вычисление пропускной способности реальных каналов.

4. *Глушков В. М., Ковалевский В. А., Михалевич В. С.*, О надежности дискретных автоматов.

Вечерние заседания

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

1. *Абрамов Л. М.*, Метрические автоморфизмы с квази-дискретным спектром.

2. *Зайдман Р. А.*, О возможности безошибочной передачи бесконечно длинных сообщений через канал с шумом.

3. *Флейшман Б. С.*, Регулярный способ построения оптимального в смысле Шенона кода для простейшего канала с шумами.

4. *Левин Р. Л., Розанов В. С.*, Исследование пропускной способности многоканальных систем при учете статистической структуры передаваемых сигналов.

5. *Башаринов А. Е., Флейшман Б. С.*, Некоторые кибернетические задачи статического различия информационных потоков.

6. *Александров М. С., Добрякова Ф. Ф., Крапивин В. Ф.*, Вычисление многомерной плотности распределения вероятностей разности фаз колебаний в совокупности флуктуирующего сигнала, шумов и коррелированной шумовой помехи.

7. *Шкурба В. В., Шор Н. З.*, Вероятностный расчет среднего времени выполнения арифметических операций на ЭВЦМ.

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

1. *Сарманов О. В.*, Об одном методе исследования стационарных матричных процессов.

2. *Сарымсаков Т. А.*, Об одной общей теореме о неподвижных точках и ее связях с эргодическими теоремами.

3. *Нагаев С. В.*, Некоторые вопросы теории однородных марковских процессов с дискретным временем.

4. *Дороговцев*, О дифференциальных уравнениях со случайными функциями.

5. *Калмыков Г. И.*, О полуупорядочении марковских процессов.

6. *Черкасов И. Д.*, Преобразование уравнений Колмогорова и обратимость марковских процессов.

7. *Сарманов О. В., Захаров В. К.*, Изменение спектра стохастической матрицы при укрупнении.

Пятница, 9 сентября

Утреннее заседание

ТЕОРИЯ ИГР И ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. *Воробьев Н. Н.*, Основные направления в теории игр.

2. *Гирсанов И. В., Колчин В. Ф., Романовский И. В.*, Некоторые вопросы теории динамических игр.

3. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Коваленко И. Н.*, Основные направления исследований в теории массового обслуживания.

4. *Харкевич А. Д.*, Задачи массового обслуживания в телефонии.

Вечерние заседания

ТЕОРИЯ ИГР И ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. *Бондарева О. Н.*, Существование решения, совпадающего с ядром, в кооперативной игре n лиц.

2. *Романовский И. В.*, Игры с неточной передачей информации.

3. *Яновская Е. Б.*, Итеративный метод решений биматричных игр.

4. *Башарин Г. П.*, О точном и приближенном методах вычисления вероятностей потерь в двухкаскадных схемах.

5. *Бобров А. А., Аров Д. З.* Потоки случайных событий без последействия.

6. *Беляев Ю. К.*, Об одном классе марковских процессов и его приложениях к задачам теории надежности.

7. *Коваленко И. Н.*, Об одном методе в теории массового обслуживания.

8. *Марьянович Т. П.*, Обслуживание с учетом выхода приборов из строя.

9. *Туманян С. Х.*, Об одной схеме обслуживания.

10. *Броди С. М.*, Решение одной задачи теории массового обслуживания.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

1. *Яглом А. М., Гладышев Е. Г., Фортус М. И.*, Некоторые результаты по теории экстраполирования процессов и полей.

2. *Волконский В. А.*, Применения теории случайных процессов к оценке точности измерительных приборов.

3. *Пугачев В. С.*, Методы определения оптимальных многомерных линейных систем.

4. *Леонов Ю. П., Раевский С. Я.*, Некоторые задачи теории нестационарных случайных процессов.

5. *Райбман Н. С.*, Корреляционные методы определения приближенных характеристик автоматических линий.

6. *Темпельман А. А.*, Эргодические однородные случайные поля на коммутативных локально компактных группах.

Суббота, 10 сентября

Утреннее заседание

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. *Колмогоров А. Н., Стратонович Р. Л., Вентцель А. Д., Керстен, Лян Чжи-шуен*, Условные марковские процессы.

2*. *Шалаевский О. В.*, О проблеме Беренса-Фишера.

3. *Синай Я. Г.*, О статистике геодезических на поверхности отрицательной кривизны.

ВОПРОСЫ ТАБУЛИРОВАНИЯ

1. *Эйдельнант М. И.*, Об издании таблиц гипергеометрического распределения.
2. *Гладков Б. В.*, Некоторые вопросы табулирования бэта — распределения.
3. *Дьяченко З. Н.*, Поверхности распределения типа Г.

Закрытие совещания

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Понедельник, 12 сентября

Утреннее заседание

1. *Прохоров Ю. В.* и *Сазонов В. В.*, К основаниям теории случайных процессов.
2. *Ченцов Н. Н.*, Дубовские множества и дубовские распределения вероятностей.
3. *Сазонов В. В.*, О характеристических функционалах.

Вечернее заседание

1. *Гирсанов И. В.*, Абсолютная непрерывность мер, соответствующих некоторым классам случайных процессов.
2. *Леонов В. П.*, *Ширяев А. Н.*, Некоторые вопросы теории старших моментов и семиинвариантов.
3. *Сульдин А. В.*, Мера Винера и ее приложения к аппроксимации функционалов.
4. *Шерстнев А. Н.*, Применение функциональных интегралов к решению уравнений в функциональных производных.
5. *Володин И. Н.*, О мере Винера окрестности пространства непрерывных функций в смысле метрики пространства Орлича.

Среда, 14 сентября

Утреннее заседание

1. *Далецкий Ю. Л., Крылов В. Ю., Ладохин В. И.*, Выражение фундаментальных решений некоторых уравнений в виде континуальных интегралов.
2. *Судаков В. И.*, К характеристике квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве.
3. *Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.*, Применение континуальных интегралов в квантовой теории поля.
4. *Стратонович Р. Л.*, О функционале вероятности диффузионных процессов.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Е. И. Гришина*

Т-00058 Подписано к печати 4/II-1961 г. Тираж 2500 экз. Зак. 3585
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 12,33+1 вкл. Бум. л. 4¹/₂ Уч.-изд. л. 12,3

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 1 р. 13 к.

2:26

ПЭК 9

11

ГЭТК НТВ

9 1.12 ТЕОР ЭЕР